IMAG

UNIVERSITÉ GRENOBLE I – JOSEPH FOURIER
SCIENCES, TECHNOLOGIE, MÉDECINE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER – GRENOBLE 1

UFR : **Informatique – Mathématiques Appliquées**

SPÉCIALITÉ : **Didactique des Mathématiques**

Cileda de Queiroz e Silva COUTINHO

Soutenue le 27 juin 2001

Introduction aux situations aléatoires dès le Collège :
de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II

Directeurs de thèse :
Michel HENRY
Colette LABORDE

COMPOSITION DU JURY, PRÉSIDÉ PAR BERNARD PARZYSZ

Rapporteurs :	Carmen BATANERO – Universidad de Granada
	Bernard PARZYSZ – IUFM de Orléans
Directeurs de thèse :	Michel HENRY – Université de Franche-Comté
	Colette LABORDE – IUFM de Grenoble
Examinateurs :	Tânia M. M. CAMPOS – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
	Annie BESSOT – Université Joseph Fourier

Cabri-géomètre

À mon fils

Remerciements

Je remercie Colette Laborde qui a accepté de diriger cette thèse, mais surtout pour tout ce qu'elle m'a appris et pour m'avoir soutenu tout au long du chemin.

Je remercie également Michel Henry, co-directeur de cette thèse mais aussi mentor et ami depuis mon « mestrado », 1993.

Je peux dire que j'ai la chance d'avoir eu deux directeurs de thèse qui m'ont appris à faire la didactique et la recherche en didactique avec beaucoup de passion.

Je tiens à remercier Carmen Batanero pour sa gentillesse, pour tout l'intérêt consacré à mon travail mais surtout pour son respect à mes idées et les remarques riches et stimulantes qui m'ont permis d'avancer.

Je remercie également Bernard Parzysz pour sa gentillesse, pour avoir apporté des contributions tellement riches, critiques et profondes, tout en encourageant les choix de cette recherche.

Je peux dire que j'ai la chance d'avoir eu deux rapporteurs pour cette thèse qui m'ont ouvert les yeux pour des possibilités de poursuivre ce travail de manière assez diversifiée, tout en gardant les pieds sur terre.

Je remercie Annie Bessot pour son soutien depuis mon arrivé à Grenoble, toujours avec un grand sourire, et pour m'avoir accordé du temps pour des échanges qui ont été cruciaux pour le début de ce travail.

Je remercie également Tânia Campos, pour m'avoir introduit aux recherches en didactique des mathématiques dès mes premiers pas lors d'une formation continue. Son amitié, son soutien et son travail de directeur de recherche m'ont permis d'arriver la où je suis aujourd'hui.

Je peux dire que j'ai la chance d'avoir eu deux examinateurs pour cette thèse qui ont été surtout des amies, en conquérant tout mon respect et mon admiration.

Un grand merci à l'équipe EIAH, qui m'a accueilli de façon si chaleureuse pendant ces quatre ans. Toutes les personnes de cette équipe me sont tellement chères qui je n'ai pas un vocabulaire suffisamment riche en français pour pouvoir m'exprimer.

Merci a Nicolas Balacheff pour son soutien au cours de cette période et pour m'avoir permis d'enrichir et élargir mes connaissances en didactique par la participation dans le groupe de travail sur les conceptions.

Je ne pourrais pas avoir fait ce travail sans l'aide et la précieuse et riche collaboration de Serge Cecconi et Bernard Capponi, qui m'ont accordé du temps pour la préparation et mise en fonctionnement de la partie expérimentale de cette thèse. Leur intérêt et leur participation ont apporté une grande richesse à ce travail.

Merci beaucoup à Jean Marie Laborde et à Bernard Genevès pour l'aide précieuse lors de tous mes « petits problèmes » au cours de mon apprentissage et de ma familiarisation avec l'environnement Cabri.

À mes amis

Un jour, en remarquant que j'étais en train de tourner une page importante de ma vie, un ami m'a raconté l'histoire suivante :

« *Il était une fois, il y a long temps, trois gamins jouaient ensemble lorsque leur maître s'est approché. Il leur pose alors une question.*

- *Mes enfants, répondez-moi à cette question. Si je vous dis que le monde finira demain, que feriez-vous ?*

Un des enfants regarde le maître et répond tout de suite :

- *Maître. Moi, je rentrerais à la maison. Avant de partir pour venir ici, je m'étais disputé avec mon père et il est resté très triste. Alors, je voudrais rentrer pour lui demander son pardon.*

Le deuxième gamin regarde aussi le maître et lui répond :

- *Maître. Moi, j'aimerais pouvoir aider ceux qui ont besoin. Je leur donnerais alors tout ce qui j'ai, mais surtout, toute mon attention et mon amour.*

Le troisième gamin, appelé Confucius, a regardé ses copains et son maître, en disant :

- *Moi, je finirais d'abord ce jeu ...* »

Merci à tous ceux qui m'ont aidé à finir ce jeu : par une aide, un mot, un moment pour m'écouter, un regard, une pensée, et surtout, par le sourire d'amitié et de soutien compris dans tous ces gestes…

J'entends et j'oublie
Je vois et je me souviens
Je fais et je comprends.
(Confucius)

Table de Matières

INTRODUCTION

> *Concernant les probabilités, l'objectif principal est que l'élève puisse comprendre qu'une grande partie des événements de la vie quotidienne est de nature aléatoire et qu'il est possible d'identifier les résultats probables de ces événements. Les notions de hasard et d'incertitude, qui se manifestent de façon intuitive, peuvent être exploitées en Collège, dans des situations dans lesquelles l'élève réalise des expériences et observe des faits (dans des situations d'équiprobabilité)* (1).

Cet extrait est issu des objectifs généraux des nouveaux programmes de Mathématiques pour l'enseignement fondamental (Collège) au Brésil.

En adoptant une approche semblable à celle qui est proposée par les programmes brésiliens, les nouveaux programmes en France pour la rentrée 2000-2001 suggèrent une démarche expérimentale pour un premier contact avec l'aléatoire. Les perspectives pour l'enseignement de la statistique pour le Lycée sont annoncées dans le document d'accompagnement du programme de Seconde :

> *-acquérir une expérience aléatoire et ouvrir le champ du questionnement statistique ;*
>
> *-voir dans un cas simple ce qu'est un modèle probabiliste et aborder le calcul des probabilités.*
>
> (Document d'accompagnement du programme de 2nde/Juin 2000, p. 6)

Pour la classe de Seconde, ce document laisse envisager un choix pour une approche expérimentale :

> *L'étude de ces expériences de références sera ainsi à la base de la formation sur l'aléatoire des élèves (...) Le choix pédagogique est ici d'aller de l'observation vers la conceptualisation et non d'introduire d'abord le langage probabiliste pour constater ensuite que tout se*

---

(1) *"Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis)".* Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasília, MEC/SEF, 1998.

passe comme le prévoit cette théorie.

(...) Le langage des probabilités présenté en première S, ES et en option de première L, formalisera le langage naï f des "chances" et du "hasard" employé en Seconde ; le calcul des probabilités permettra ensuite d'expliquer certains phénomènes observés.

(Document d'accompagnement du programme de 2^nde^/Juin 2000, p. 7)

Non seulement en France ou au Brésil, mais dans d'autres pays, l'enseignement des probabilités est appelé à changer. Des nouveaux projets curriculaires proposent des changements d'approches, de méthodes, ou d'organisation temporelle dans la scolarité des élèves. Citons l'anticipation d'un premier contact scolaire avec l'aléatoire par des activités d'observation et de description de situations de la réalité dans lesquelles on peut identifier l'intervention du hasard. Citons aussi l'introduction au Brésil des petites questions combinatoires débouchant sur des problèmes posés dans des cadres probabilistes, comme l'évaluation a priori des "chances" d'obtenir un résultat donné.

Les recherches sur l'apprentissage ou sur l'acquisition opératoire de notions probabilistes sont menées par toute une communauté de chercheurs dans le monde, dans le cadre des Sciences de l'Éducation, de la Psychologie Cognitive ou de la Didactique des Mathématiques. Ces recherches portent sur les conceptions des élèves à propos du hasard, l'appréhension des chances, du raisonnement combinatoire et d'estimation de probabilités. L'enseignement des probabilités est ainsi l'objet de nombreux travaux concernant le curriculum, les méthodes et les approches, notamment concernant l'utilisation d'environnements informatiques ou de matériel concret pour la réalisation d'expériences aléatoires, etc. Ces divers questionnements sont bien résumés dans l'extrait suivant (Fischbein, 1975) :

Quel âge, par exemple, est le meilleur pour le début de cet enseignement ? Dans quel ordre devrait-on enseigner les concepts, pour que le corps de connaissances acquises soit le plus possible fiable et viable ? Quelle devrait être la proportion entre des éléments concrets et des éléments abstraits, présentation intuitive et présentation axiomatique, exposition « ex cathedra » et l'encouragement de la découverte autonome ? (Fischbein, 1975, p. 3) [(2)].

[(2)] "*What, for example, is the best age to start teaching it ? In what order should the concepts be taught, in order that the acquired body of knowledge should be as reliable and viable as possible? What should be the proportion of concrete to abstract elements, intuitive to axiomatic presentation, "ex cathedra" exposition to the encouragement of independent discovery?*"

La recherche qui fait l'objet de cette thèse se nourrit de ces questionnements. Elle est la suite d'un travail antérieur (Coutinho, 1994 ; Coutinho et al., 1996) qui montre que quelques-unes des conceptions retrouvées chez les élèves peuvent devenir des obstacles à l'apprentissage de la notion de probabilité. Ils ont aussi mis en évidence que le biais d'équiprobabilité et la croyance que la probabilité d'un événement peut changer selon les informations obtenues par rapport à cet événement, autant de conceptions qui résistent à l'enseignement. Leur présence chez des élèves dont l'âge se situe entre 16 et 19 ans a été constaté à l'aide d'un post-test, quelques mois après enseignement et d'un dispositif expérimental dans le cas des élèves âgés de 12-13 ans. Cette dernière phase de notre précédente recherche se situait en continuité des résultats déjà obtenus dans le cadre théorique de la psychologie cognitive, éclairé par les travaux de Fischbein, Tversky et Kahnemen, parmi d'autres. Nous avions pu alors constater que les conceptions spontanées chez les élèves sont moins résistantes à l'enseignement lorsqu'on introduit la notion de probabilité dans une approche fréquentiste.

Il s'agit ici de centrer l'étude non plus sur l'élève en tant que sujet cognitif mais sur l'enseignement même et son impact sur l'apprentissage. De façon plus précise, la question centrale de ce travail est :
« Dans quelles conditions didactiques les élèves peuvent-ils se familiariser avec des situations aléatoires en contexte scolaire et s'engager dans une appréhension de nature probabiliste et en termes de modèle de telles situations dès le Collège ? »

Zaki (1990), dont le travail porte sur l'apprentissage de la notion de probabilité en environnement informatique, a montré l'importance de la compréhension, par l'élève, du lien entre le calcul de la probabilité d'un événement et le modèle au sein duquel ces calculs sont faits. Zaki conclut donc à la nécessité de travailler dans l'enseignement à l'élaboration par les élèves de ce lien. **Nous faisons l'hypothèse que ce lien peut se construire dans un processus de modélisation d'expériences de la réalité**. Puisque nous travaillons avec des élèves à la charnière du Collège et du Lycée, nous formulons la question supplémentaire :
« Dans quelles conditions didactiques les élèves peuvent-ils modéliser de façon autonome, spontanément ou à la demande, une expérience aléatoire simple qu'ils sont en train de réaliser ? »

Pour répondre à ces questions, nous avons organisé la recherche en deux grandes parties. La première partie concerne la délimitation du cadre théorique et est constituée par les Chapitres I et II. Le Chapitre I présente une étude de l'idée de hasard et des notions de probabilité et de modèle, destinée à délimiter le champ de problèmes sur lesquels peut être fondée une didactique des probabilités. Le Chapitre II complète cette délimitation par la présentation des notions de *domaine pseudo-concret*, d'*expérience aléatoire* et de *modèle d'urne de Bernoulli*, abordées selon un point de vue didactique.

L'étude développée dans cette première partie de la recherche débouche sur la problématique, présentée au Chapitre III, sur les questions précisées qui guident cette recherche ainsi que sur les hypothèses de travail prises. Cette première réflexion conduit à limiter la complexité des situations aléatoires à présenter aux élèves, et à se restreindre au cas de situations de Bernoulli.

L'objectif d'un travail dans de telles situations est de créer le lien entre "pré-probabilité", "expérimentation", "estimation fréquentielle" et modèle de Bernoulli sous jacent. Ce modèle sera alors présenté comme un signifiant de la dualité incontournable entre probabilité a priori en termes de "chances" dans une situation de répartition uniforme, et estimation expérimentale dans des situations de simulation.

Le chapitre III présente de plus la méthodologie choisie relevant de l'ingénierie didactique. Nous proposons alors l'organisation d'une ingénierie autour de trois situations didactiques qui la constituent : « Expérience de Bernoulli », « Urne à Pixels » et « Franc-Carreau ». Cette ingénierie a été conçue selon le choix didactique de mettre les élèves en contact avec des situations de la vie réelle dans lesquelles nous pouvons identifier des composantes d'imprévisibilité (intervention du hasard). Ce contact est fait par la mise en place d'une démarche expérimentale dans laquelle les élèves vont observer et décrire des situations aléatoires, puis manipuler des générateurs de hasard, en réalisant eux-mêmes les expérimentations. Nous avons choisi de mener les premières activités de cette ingénierie hors environnement informatique et dans un deuxième temps dans un environnement informatique. Ainsi, le Chapitre III présente-t-il l'environnement informatique choisi : l'environnement de géométrie dynamique Cabri-géomètre II.

La deuxième partie de cette recherche porte sur la mise en place de notre dispositif expérimental, la séquence d'activités composant notre ingénierie didactique. Cette partie cherche à montrer dans quelles conditions les éléments de notre cadre théorique ont été mobilisés dans le but d'engager les élèves dans un travail avec l'aléatoire. Les chapitres IV, V et VI présentent, une étude assez précise de chacune des situations didactiques de l'ingénierie : l'analyse a priori, le déroulement des activités et l'analyse a posteriori. Le Chapitre IV est consacré à la première situation didactique, «Expérience de Bernoulli », pour un premier contact en situation scolaire avec l'aléatoire et avec la démarche de modélisation hors environnement informatique. Le chapitre V concerne la deuxième situation, « Urne à Pixels », qui introduit l'environnement informatique et la probabilité géométrique en tant que rapport d'aires. Cette situation est particulièrement importante dans notre ingénierie car elle introduit le lien entre la proportion de boules dans une urne de Bernoulli et la probabilité géométrique. Ce lien est possible au moyen d'une discrétisation de surfaces faite grâce à l'interprétation didactique d'un "pixel", présentée au chapitre III. Le Chapitre VI présente la dernière situation didactique, la situation « Franc-Carreau », dont l'objectif est de confronter l'élève à un problème dont la résolution exige la mobilisation des connaissances et savoirs-faire introduits par les deux situations précédentes.

Ce travail de recherche a pour objectif de contribuer à dégager des éléments d'appréciation sur les possibilités d'initier un travail sur l'aléatoire dès le Collège.

<u>CHAPITRE I</u> : HASARD, PROBABILITÉS ET MODÈLES - UNE BRÈVE PRÉSENTATION

Introduction

Ce chapitre contient une brève présentation de quelques éléments de base pour l'apprentissage des probabilités, tels que *l'idée de hasard* et *les notions de probabilité et de modèle probabiliste*, du point de vue de leur genèse historique. Nous souhaitons mettre en évidence la relation entre la réalité qu'on observe et l'adéquation des outils théoriques qu'on utilise pour la représenter. Quelles conséquences didactiques pouvons-nous en dégager lors de l'enseignement de la modélisation des situations aléatoires au niveau du Collège ?

Face à la question posée, le développement de ce chapitre conduit à :

- Repérer quelques appréhensions du hasard qui sont présentes dans l'Histoire et qui peuvent encore exister dans la pensée contemporaine.
- Dégager la dualité dans le fonctionnement de la notion de probabilité, entre concept théorique quantifiant l'incertitude et outil d'interprétation de situations expérimentales où le hasard intervient.
- Délimiter le champ de problèmes sur lequel va porter notre proposition d'enseignement.

§1. Hasard

§1.1. La contextualisation du hasard

La notion de hasard est une notion complexe qui a reçu diverses interprétations au cours de l'histoire des sciences et de la philosophie, car elle concerne notre propre perception du monde. Dans cette recherche, nous nous limitons à décrire l'appréhension du hasard par rapport au contexte dans lequel il est inséré. Ainsi, si la réalité traduit la perception du réel par le sujet, nous étudierons les situations de la réalité dans lesquelles le hasard peut intervenir (contextualisation du hasard).

Notre objectif est de rendre explicite la distinction entre les situations qui peuvent être reproduites au moins par la pensée (et qui, par conséquent, peuvent être modélisées), et les situations contingentes (non-reproductibles). Donnons un exemple d'une situation reproductible. L'action de lancer une pièce pour jouer à « *pile ou face* » est une **situation reproductible de la réalité : la reproduction des conditions d'observation de son**

déroulement et ses résultats possibles sont envisageables parce que nous pouvons au moins imaginer que le lancer de cette pièce se fait toujours dans des conditions analogues, en produisant les mêmes résultats possibles, pile ou face.

Observons qu'au cours de l'Histoire, cette perception de la reproductibilité n'était pas toujours présente, l'intervention du hasard est aussi perçue comme à l'origine de faits contingents et concourt à des pratiques de prédiction de l'avenir entre autres.

§1.2. Loisir ou croyances : les premiers contextes

Nous pouvons constater que les peuples qui vivaient en Mésopotamie ou en Ancienne Égypte liaient l'idée de hasard à des *interventions divines ou surnaturelles*. Nous nous référons aux pratiques de consultation des auspices ou aux prédictions des pythonisses, afin de prédire l'avenir et d'interpréter la volonté des dieux. Ce type de rapport au hasard, celui de la *croyance en des interventions divines*, restera longtemps une constante dans le comportement humain. Nous pouvons, encore actuellement, l'identifier dans certaines cultures, certains rites (pratiques de voyance, etc.). Nous pouvons aussi nous demander si les jeux de hasard, comme les jeux d'astragales, les jeux de dés fabriqués en terre cuite, entre autres, étaient utilisés à des fins de loisir tout en intégrant une dimension mystique ou psychologique du hasard.

Ces jeux ont été pratiqués depuis l'Antiquité. Les outils mathématiques nécessaires au développement de cette branche de la connaissance, comme le raisonnement combinatoire et le calcul de proportions, étaient connus depuis plusieurs siècles. Pourtant, il peut être surprenant d'observer que l'on trouve les premières études de combinatoire appliquées à l'analyse de ces jeux seulement au XVI^e^ siècle surtout Cardan et, en début du XVII^e^ siècle, chez Galilée. Citons les explications données par J. F. Pichard à propos de cette lacune :

> *(...) Une première raison est qu'un traité scientifique sur les jeux de hasard ne fait peut-être pas sérieux, le jeu étant chose futile aux yeux des savants. Une autre raison, certainement plus importante, est que le résultat d'un tirage "au sort" est l'expression de la volonté divine, et comme telle on ne doit pas calculer dessus, on ne doit pas tenter Dieu (ou le Diable) (...)* (Pichard, 1997, p. 107).

Ainsi, c'est seulement après le XVI^e^ siècle que le calcul sur le hasard passe par une évolution rendue possible par le développement de l'analyse combinatoire : le hasard *intervenant dans l'utilisation simple de générateurs de hasard, dans un contexte ludique*. Citons par exemple la manipulation de pièces de monnaie, dés, cartes, roulettes, entre autres.

Nous avons ainsi les études de Cardan (mathématicien, médecin et joueur, 1501 – 1576). Son œuvre fragmentaire *De Ludo Aleae*, écrite au XVI^{e} siècle, n'a été publiée seulement qu'en 1665, bien après sa mort. Cette œuvre avait comme motivation de permettre de prendre de bonnes décisions dans les problèmes de jeux de hasard posés à cette époque.

Cette nouvelle appréhension du hasard, dans des situations de dénombrement des possibilités à venir, marque le début des conceptions probabilistes : elles se trouvent explicitées dans la correspondance entre Pascal et Fermat, qui date de 1654, montrant que le hasard est "géométrisable"(3). Selon B. Bru (1981), cette correspondance est déjà une recherche des régularités par un raisonnement de symétrie dans le temps : le jeu, se renouvelant identiquement dans le temps et de façon régulière, rythme le hasard.

§1.3. Le déterminisme et la rationalisation du hasard

L'approche déterministe présente un autre contexte pour l'interprétation du hasard. Citons J. Bernoulli (1713) comme l'un des premiers à confronter, dans son œuvre *Ars Conjectandi,* la notion de probabilité à une pensée déterministe. C'est un pas important vers la rationalisation du hasard. Voici un extrait du début de la quatrième partie qui montre bien ce point de vue adopté par Bernoulli :

> *Tout ce qui bénéficie sous le soleil de l'être ou du devenir, passé, présent ou futur, possède toujours en soi et objectivement une certitude totale. C'est évident du présent et du passé : ce qui est ou a été ne peut pas ne pas être ou avoir été. Sur le futur, il n'y a pas à discuter ; cependant ce n'est pas par la nécessité de quelque destin qu'il ne peut pas avenir, mais en raison soit de la prescience soit de la prédétermination divine ; car si n'arrivait pas avec certitude tout ce qui est futur, on ne voit pas comment le Créateur suprême pourrait conserver entière la gloire de son omniscience et de son omnipotence.* (Bernoulli, 1713, p. 14).

Dans ce même esprit, mais explicité beaucoup plus radicalement que dans le texte de J. Bernoulli, nous trouvons le point de vue de Laplace, au début du XIX^{e} siècle. Nous pouvons présenter le déterminisme laplacien en citant ce paragraphe du début de l'*Essai Philosophique*

---

(3) L'expression «la géométrie du hasard » proposée par Pascal dans son adresse à l'Académie Parisienne signifie qu'on peut raisonner, spéculer et faire des calculs avec le hasard. On dirait aujourd'hui « la mathématique du hasard ».

sur les Probabilités (1814), présenté en introduction à sa théorie analytique, quand il parle des lois de la nature. Cet extrait commence par l'affirmation que « *le hasard ne serait que l'expression de notre ignorance* », et invoque le principe leibnizien de *la raison suffisante* :

> *(…) Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de l'univers, on les a fait dépendre de causes finales, ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient et se succédaient avec régularité, ou sans ordre apparent ; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie, qui ne voit en elles que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes.*
> *Les événements actuels ont avec les précédents une liaison fondée sur le principe évident, qu'une chose ne peut pas commencer d'être, sans une cause qui la produise. Cet axiome, connu sous le nom de "principe de la raison suffisante", s'étend aux actions même que l'on juge indifférentes (…) Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre.* (Laplace, 1814, p. 32*)*.

Encore dans le contexte du déterminisme laplacien, nous trouvons l'œuvre de Cournot, au XIX[e] siècle, dans laquelle le hasard est la rencontre de deux séries causales indépendantes. Pour Cournot, tous les événements ou phénomènes ont une cause et par suite chaque événement est la cause d'un autre dans une sorte d'enchaînement déterminé.

Mais aussi, il faut remarquer que selon Cournot, un événement est considéré comme résultat du hasard s'il n'y a aucune relation raisonnable entre les causes qui conduisent à tel ou tel état final. Autrement dit, pour être de hasard, l'événement ne doit être en rien prédéterminé ou favorisé. Cournot assimile alors le hasard à l'équiprobabilité (ou l'égalité des chances, selon la terminologie de l'époque) de cet événement de se produire ou de ne pas se produire.

> *L'élaboration du concept de hasard ne relève donc pas pour Cournot d'une analyse empirique, tirant de l'observation du réel des éléments nécessaires à sa construction, mais mobilise une démarche déductive, qui forge le concept de hasard à partir de la combinaison de deux principes rationnels, le principe de causalité et le principe de l'indépendance des séries causales.* (Martin, 1996, p. 110).

Une distinction nécessaire pour l'analyse de ce type de contexte dans lequel on étudie l'intervention du hasard, est celle qui explicite les différences entre les notions de cause et de raison. Selon l'analyse de T. Martin (1996), pour Cournot les causes ont une fonction productrice, alors que les raisons ont une fonction explicative. Cela nous amène à remarquer que, dans ces conditions, la contingence est l'absence de toute raison (Lestienne, 1993).

Parmi les causes productrices d'un fait, T. Martin met en évidence la distinction faite par Cournot entre les causes régulières (les invariants) et les causes accidentelles (qui déterminent la singularité) :

> *Si on considère un événement fortuit et répétable, comme celui auquel donne lieu le jeu de pile ou face, on doit distinguer, dit Cournot, des causes régulières ou permanentes, qui demeurent identiques pour toutes les épreuves (la régularité ou l'irrégularité de structure de la pièce) et des causes fortuites ou accidentelles, qui varient avec chaque épreuve (la direction et l'intensité de la force impulsive). (…) Autrement dit, si les causes permanentes déterminent la fréquence de l'événement, les causes accidentelles déterminent sa singularité.* (Martin, 1996, p. 124).

Prenons l'exemple d'un tirage au Loto. Les causes régulières sont la structure de l'urne, la structure et la taille des boules qui sont dans cette urne et finalement le mécanisme physique de sélection d'une boule. Nous pouvons identifier comme cause accidentelle, parmi d'autres, le nombre des rotations de cette urne avant chaque tirage. Du point de vue de Cournot, on peut admettre que le hasard peut être présenté comme le résultat d'une combinaison entre causes régulières et causes accidentelles.

On assiste au début du XX^{e} siècle à une évolution due à un changement qualitatif par rapport aux interprétations précédentes du hasard. Les idées de Poincaré (1912) apportent une contribution très importante à cet élargissement. L'extrait ci-dessous, partie du premier chapitre de son ouvrage *Calcul des Probabilités*, explicite bien cette nouvelle étape vers une rationalisation du hasard :

> *Il faut bien que le hasard soit autre chose que le nom que nous donnons à notre ignorance, que parmi les phénomènes dont nous ignorons les causes, nous devions distinguer les phénomènes fortuits, sur lesquels le calcul des probabilités nous renseignera*

> *provisoirement, et ceux qui ne sont pas fortuits et sur lesquels nous ne pouvons rien dire, tant que nous n'aurons pas déterminé les lois qui les régissent.* (Poincaré, 1912, p. 3).

Dans la suite, Poincaré présente le hasard comme une manifestation macroscopique d'une cause très petite, qui nous échappe. L'exemple qu'il donne pour illustrer cette interprétation est celui de l'équilibre instable d'un cône parfait, qui est posé droit sur sa pointe et qui cependant va tomber sans que l'on puisse prédire de quel côté :

> *Si un cône repose sur sa pointe, nous savons bien qu'il va tomber, mais nous ne savons pas de quel côté ; il nous semble que le hasard seul va en décider. Si le cône était parfaitement symétrique, si son axe était parfaitement vertical, s'il n'était soumis à aucune autre force que la pesanteur, il ne tomberait pas du tout. Mais le moindre défaut de symétrie va le faire pencher légèrement d'un côté ou de l'autre, et dés qu'il penchera, si peu que ce soit, il tombera tout à fait de ce côté. Si même la symétrie est parfaite, une trépidation très légère, un souffle d'air pourra le faire incliner de quelques secondes d'arc ; ce sera assez pour déterminer sa chute et même le sens de sa chute qui sera celui de l'inclinaison initiale.*
>
> *Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard.* (Poincaré, 1912, p. 4).

Dans ce contexte, pour définir le hasard, Poincaré dégage des invariants afin de modéliser les événements fortuits. Au sens de Cournot, nous pouvons dire que Poincaré distingue les causes régulières de causes accidentelles. Pour lui, l'accidentel n'est pas un objet du calcul des probabilités. Ainsi, pour l'étude sur l'équilibre d'un cône qui repose sur sa pointe, Poincaré désigne comme causes régulières sa symétrie parfaite, la position de son axe étant considérée comme parfaitement verticale. Les causes accidentelles sont, pour lui, une trépidation très légère et/ou un souffle d'air. Il assimile le *hasard*, donc, à *des causes qui nous échappent*, à une disproportion entre des causes infimes et leurs effets macroscopiques. Il renforce cette notion de phénomène sensible par rapport aux conditions initiales, en reprenant notamment l'exemple de la météorologie déjà proposé par J. Bernoulli au XVII^{e} siècle :

> *Qui encore recensera les cas innombrables des changements auxquels*

> *l'air est soumis chaque jour, en sorte qu'on puisse à partir de là conjecturer ce que sera son état après un mois, sans parler d'une année ?* (Bernoulli, 1713, p. 42).

Selon la formulation de Poincaré (1912, p. 5), «*les grandes perturbations se produisent généralement dans les régions où l'atmosphère est en équilibre instable* ». Mais Poincaré considère aussi comme causes accidentelles les erreurs inévitables commises par l'observateur et ses instruments : même les plus petites erreurs vont accumuler leurs effets « *que nous attribuerons au hasard, parce que leurs causes sont trop compliquées et trop nombreuses* ».(Poincaré, 1912, p. 10).

Nous avons ainsi une approche du hasard d'un point de vue déterministe : **le résultat d'un processus aléatoire dû à une complexité de causes insaisissables, complexité qui échappe à la maîtrise par l'homme et ses instruments**. Nous considérons de ce point de vue les résultats possibles de manipulations d'un générateur de hasard, comme les jeux de hasard dans lesquels on manipule des objets qui peuvent se présenter sous diverses apparences. Nous considérons aussi les phénomènes sensibles qui traduisent l'effet macroscopique de causes infimes, comme le contexte des prévisions météorologiques que l'on vient de décrire.

§1.4. Les différents contextes et la reproductibilité

Nous voulons **mettre en évidence des éléments qui permettront aux élèves l'identification des situations reproductibles dans lesquelles le hasard intervient.** Ces situations seront modélisables dans le cadre théorique du *Calcul des Probabilités*. Nous avons pu, au moyen de cette étude, présenter quelques appréhensions du hasard qui coexistent encore aujourd'hui. Dans l'objectif d'aboutir à un processus d'apprentissage de la modélisation des situations aléatoires, nous pouvons classer ces appréhensions selon les possibilités de reproduire des situations de la réalité qui les contextualisent.

Nous différencions ainsi deux types de contextes. Le premier, le contexte mystique-psychologique, que nous appellerons « *situations de la contingence* », qui sont des situations non-reproductibles, qui conduisent à une appréhension du *hasard comme une expression du divin ou de la fatalité.* Le deuxième contexte est celui de la reproductibilité, auquel nous attacherons les situations de la réalité qui peuvent s'interpréter par un prélèvement *au* *hasard* [4] dans une population. Dans ce contexte, nous considérons les manipulations des générateurs de hasard (contexte « *jeux de hasard* ») et les phénomènes sensibles (contexte « *vie quotidienne* »). Ces situations se caractérisent par le fait qu'elles peuvent être modélisées dans le cadre d'une description probabiliste.

Ainsi, nous laissons de côté beaucoup de considérations philosophiques à propos du hasard pour ne retenir que l'approche plus opérationnelle d'un point de vue didactique : **la possibilité de reproduire une situation de la réalité dans laquelle le hasard intervient comme point de départ pour sa modélisation**. Le schéma ci-dessous montre les distinctions que nous voulons retenir par rapport au contexte dans lequel on peut identifier l'intervention du hasard, selon le caractère de reproductibilité de la situation de la réalité que l'on veut modéliser.

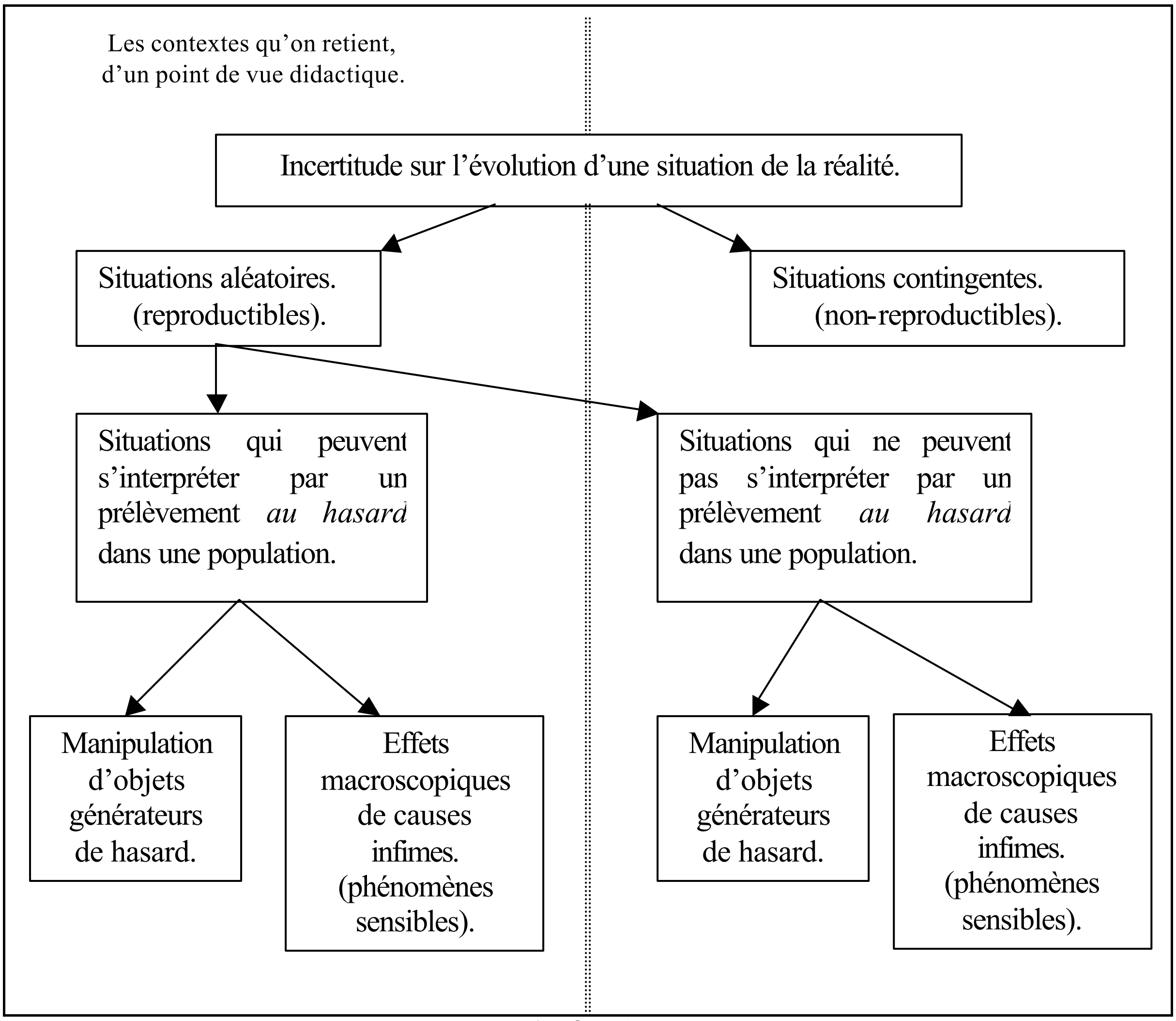


Schéma 1

(4) Nous faisons la distinction entre prélèvement «au hasard » (avec équiprobabilité des éléments de la population) et prélèvement « aléatoire » (selon une distribution de probabilités pas nécessairement uniforme des éléments de la population).

Selon ce schéma, nous distinguons deux contextes distincts, mais qui relèvent d'une même approche épistémologique : les jeux de hasard et les phénomènes sensibles. Pourtant, d'un point de vue didactique, ils sont nettement différents chez les élèves car la perception de la possibilité de représentation par un prélèvement *au hasard* dans une population n'est pas toujours évidente, selon les connaissances disponibles du sujet. Analysons l'exemple des prévisions météorologiques pour mieux comprendre ces différentes appréhensions selon le sujet observateur. D'un point de vue de l'élève, ces prévisions météorologiques ne sont pas comparables à un prélèvement *au hasard* dans une population, si l'on considère les connaissances qui lui sont disponibles au niveau du Collège. Par contre, nous pouvons changer le point de vue en passant à la position du météorologue, et donc ayant l'accès à un plus haut niveau de connaissances spécifiques. Les prévisions météorologiques peuvent alors être comprises le fruit de modèles complexes donnant lieu à des bifurcations possibles que l'on peut considérer comme prélevées *au hasard* dans une population de situations qui sont précédées par les mêmes circonstances météorologiques.

Cette possibilité de limitation des contextes liés à l'intervention du hasard nous permet de poser notre **objectif didactique : construire des activités d'apprentissage face auxquelles les élèves puissent dégager des éléments qui favorisent la distinction entre le hasard intervenant dans des *situations potentiellement reproductibles* et le hasard de la contingence**. Dans notre contexte de travail, les situations potentiellement reproductibles sont des situations de la réalité que nous pouvons considérer comme reproductibles au moins par la pensée car elles relèvent d'une description assez précise des conditions dans lesquelles elles peuvent être reproduites. Nous les appellerons *situations aléatoires*.

Illustrons cette distinction avec l'exemple célèbre dû à Cournot : une tuile qui tombe sur la tête d'une personne qui passe sous le toit d'une maison est le fruit d'un hasard contingent parce qu'on ne peut pas imaginer d'expérience aléatoire qui le produise. Autrement dit, il n'y a pas la possibilité de reproduire les conditions qui ont amené cette personne à passer sous ce toit au moment même où la tuile est tombée.

Pour modéliser, et ensuite reproduire une telle situation dans le contexte de situations aléatoires, il faudrait prendre du recul et utiliser les outils de la description statistique. Cela signifie que l'on ne s'intéresse plus à une personne donnée, mais à la population formée par l'ensemble des personnes qui sont susceptibles de recevoir une tuile sur la tête. Est-il possible d'observer, dans cette population, des régularités suffisantes pour supposer leur reproductibilité, ou du moins dégager d'une étude statistique, une quantification des

« chances » que cela puisse arriver à un individu pris *au hasard* dans cette population ? Nous pouvons ainsi développer notre analyse d'un point de vue rationnel, conduisant à un regard de nature statistique : nous cherchons à analyser les invariants d'un ensemble d'expériences semblables par rapport au contexte dans lequel le hasard est perçu, ayant pour objectif leur représentation par un même modèle.

La citation ci-dessous exprime bien la dualité entre le hasard et la contingence que nous voulons mettre en évidence : « *Considérer un fait comme contingent, c'est donc déjà envisager que d'autres faits auraient pu se produire à sa place et donc le placer dans un ensemble de possibles c'est-à-dire une structure.* » (Brousseau, 1993, p. 3)

La question est alors d'étudier ce fait comme étant un élément d'un ensemble de faits semblables placés dans une même structure. Cette démarche nous place dans une recherche des régularités qui puissent bien caractériser la situation aléatoire qu'on veut modéliser. En conséquence, nous mettons de côté le point de vue contingent pour adopter un point de vue que nous pouvons appeler statistique, et pour lequel ces régularités seront les régularités observables du hasard. À l'appui de ce positionnement, citons J. Bernoulli (1713) :

> *Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables ; car on doit présumer que, par la suite, chaque fait peut arriver et ne pas arriver dans le même nombre de cas qu'il avait été constaté auparavant, dans un état de choses semblables, qu'il arrivait ou n'arrivait pas.* (Bernoulli, 1713, p. 42).

Dans cet extrait, nous décelons un souci de dégager des régularités au niveau macroscopique. Cela veut dire, suivant Brousseau, que l'on peut apercevoir un passage du cas particulier [5] à un ensemble de cas semblables pour lesquels nous pouvons essayer de trouver des modèles qui prennent en compte ces régularités. Nous arrivons ainsi à **la notion de hasard intervenant dans des situations que nous disons reproductibles dans le sens que nous venons d'évoquer et qui nous permettra de réaliser le passage du domaine de la réalité au domaine théorique.**

[5] Un cas particulier qui, au sens de Cournot, est un fait contingent.

§1.5. Le premier pas vers la modélisation

L'identification du statut du hasard en tant qu'obstacle à l'enseignement de la modélisation d'une situation aléatoire, ainsi que nous l'avons présenté dans ce paragraphe, nous conduit à des choix pour notre ingénierie didactique. Ces choix peuvent être résumés par une introduction au processus de modélisation par des activités d'observation et de description d'une situation de la réalité, dans le but de donner les instructions nécessaires et suffisantes pour sa reproduction. Le sens que nous utilisons pour *situation reproductible* est celui que nous avons déjà explicité au début de ce paragraphe : **situation du domaine de la réalité pour laquelle est envisageable la reproduction des conditions d'observation, de son déroulement et de ses résultats possibles**.

Cette activité, dont la conséquence est la mise en fonctionnement d'un débat collectif entre les élèves et l'enseignant, doit permettre un travail sur les diverses appréhensions du hasard que nous trouvons chez ces élèves. L'objectif de ce débat est de pouvoir bien délimiter le domaine de validité de ces appréhensions et ainsi de dégager la notion qui sera le support des connaissances introduites par la suite. La conséquence d'un tel travail doit aboutir à une capacité de raisonnement scientifique lors de la résolution d'un problème lié à l'identification d'une composante d'imprévisibilité dans des situations de la réalité. Cette mise à niveau doit permettre de concevoir la reproduction de telles situations et de s'engager dans un processus de modélisation pouvant déboucher sur des simulations informatiques.

§2. Probabilités

L'intérêt pour les jeux de hasard, supposant un enjeu et l'idée de jeu équitable, est intrinsèque à l'histoire de l'humanité. On trouve les premières traces de manipulation d'objets dans le but d'obtenir des résultats dus au hasard, dans les vestiges des civilisations anciennes, vers 3500 ans avant notre ère (Borovcnik et al., 1991, p. 27), (Pichard, 1997, p. 105), (Henry, 1994, p. 15). Citons l'exemple des jeux d'astragales, utilisés par les soldats romains de l'époque comme un jeu avec des mises sur les faces qui peuvent se présenter après un jet. Nous trouvons aussi des jeux qui utilisaient des dés construits à partir d'un travail sur les parties arrondies d'un astragale. Ces dés étaient de manipulation difficile quand il y avait un enjeu. Selon Borovcnik et al. (1991, p. 28), l'utilisation de différents types d'os appartenant à différents types d'animaux rendait « *obscure la régularité d'apparition des issues.* »

Des jeux avec dés en terre cuite, bien cubiques et homogènes, ont été pratiqués depuis le troisième millénaire avant notre ère, en Mésopotamie, en Egypte et à Babylone. Leur usage pouvait avoir un but ludique, mais la manipulation de ces objets pouvait aussi avoir un contexte mystique de pratiques religieuses.

L'usage de dés pipés à l'époque de la Rome ancienne et la prohibition des jeux à différentes époques montrent que la pratique du hasard était très répandue. Cette pratique suppose l'existence d'une certaine notion d'équiprobabilité :

> *On a retrouvé des dés spécialement pipés datant de cette époque, d'où la notion complémentaire de dé équitable, et l'on peut conjecturer que des joueurs avaient empiriquement senti la fréquence d'apparition des différentes faces, c'est-à-dire une conception intuitive de la loi des grands nombres.* (Pichard, 1997, p. 106).

Nous remarquons ainsi une **appréhension perceptive** (6) **des chances d'obtenir un certain résultat à partir d'un processus aléatoire**. Dans ce cas, nous dirons qu'il y avait une sorte d'**évaluation naïve des chances d'obtenir le résultat attendu** lors de la pratique d'un jeu pour lequel le déroulement pourrait produire différentes issues attribuées au hasard.

§2.1. L'approche combinatoire

Un autre rapport à l'évaluation du «*nombre de chances* » s'installe avec le développement du calcul des combinaisons. Cette évaluation prend son point de départ dans le dénombrement des résultats possibles d'un jeu et sur l'hypothèse implicite d'équiprobabilité : on supposait que, dans l'incertitude absolue, toutes les issues observables du résultat du jeu avaient *« autant de chances »* de sortir (7). Ainsi, à partir du XV^{e} siècle on voit apparaître les premiers dénombrements des possibilités (Bru, 1981, p. 143). Les questions sur les jeux et les paris des joueurs qui ne doivent pas miser également, mais en fonction des chances respectives de gagner, sont à l'origine d'une nouvelle façon d'évaluer les *chances* : le raisonnement combinatoire.

Le premier document connu montrant ce type de raisonnement est un poème appelé «*De Vetula* », écrit par un haut érudit ecclésiastique français, Richard de Fournival, en 1250. Ce poème décrit un calcul de combinaisons se rapportant au jet de trois dés. D'après

---

(6) Nous utilisons l'expression « appréhension perceptive » au sens de Duval (1994) : « *l'appréhension perceptive a une fonction épistémologique d'identification des objets en deux ou trois dimensions. Cela se fait par des traitements cognitifs effectués automatiquement, et donc inconsciemment* ». (p. 124).

(7) Principe d'indifférence énoncé par Laplace. Nous allons revenir sur ce point au paragraphe §2.5 dans ce chapitre.

Bellhouse (2000), la partie de ce texte qui présente une description plus détaillée du raisonnement utilisé se trouve entre les lignes 405 à 459, selon la numérotation de Klopsch, faite en 1967.

Prenons un extrait de ce poème pour illustrer la façon dont son auteur fait appel à un raisonnement probabiliste fondé sur le dénombrement des résultats possibles pour la somme des points obtenus lors que l'on jette trois dés [8].

> *Peut-être, cependant, vous affirmeriez que certaines sommes sont meilleures*
> *Que d'autres que les joueurs jouent, pour la raison que,*
> *Puisqu'un dé a six faces donnant six nombres simples,*
> *Sur trois dés il y en a dix-huit,*
> *Parmi lesquels seulement trois peuvent se présenter.*
> *Ils varient de différentes manières, et parmi lesquelles*
> *Seize sommes composées sont produites. Elles ne sont pas toutefois*
> *De valeurs égales, puisque la plus grande et la plus petite d'entre elles*
> *Viennent rarement et les intermédiaires fréquemment,*
> *Et les autres plus elles sont proches des valeurs centrales,*
> *Meilleures elles sont et plus fréquemment elles arrivent.*
> *[...]*
> *Elles varient selon cinquante-six façons selon les configurations de la face supérieure du dé,*
> *Et ces configurations selon deux cent seize façons d'apparaître.*
> *Elles doivent être reparties entre les nombres composés intéressant les joueurs,*
> *Ainsi qu'il se doit,*
> *Vous connaîtrez entièrement combien grand est leur gain*
> *Quel qu'il puisse être, ou combien grand est leur perte.*
> (Bellhouse, 2000, pp. 134-135).

Voici comment Luca Pacioli, dit Fra Luca di Borgo, présente en 1494 le problème typique de répartition des mises, ou *« comment faire le parti des mises »* comme l'expriment

[8] Traduction littéraire de la traduction anglaise, faite à partir du texte latin par Klopsch (1967), citée par Bellhouse (2000).

Pascal et Fermat dans leur correspondance de 1654 :

> *Une brigade joue au jeu de Paume, de telle sorte qu'il est requis un total de 60 points pour gagner. Chaque but compte 10 points. L'enjeu est de 10 ducats. Suite à un quelconque incident, les soldats ne peuvent finir le jeu. Un camp a 50 points et l'autre 20. On demande quelle part de l'enjeu revient à chaque camp.* (Pacioli, 1494, *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita*, cité par Henry, 1994, p. 16).

Le problème « des partis » ou de « la répartition » est considéré comme le problème fondateur du Calcul des Probabilités. Il est l'objet de la célèbre correspondance entre Pascal et Fermat, datant de 1654, qui a marqué la naissance de la « *Géométrie du Hasard* ». D'après J-F. Montucla (1802), le problème « des partis » [(9)] fut proposé à Pascal par le chevalier de Méré, qui lui proposa aussi quelques autres problèmes sur les jeux de dés pratiqués à l'époque. Pascal propose le même problème à Roberval et à Fermat. Roberval échoue dans la recherche d'une solution, mais Fermat présente une solution correcte en utilisant une méthode différente de celle qui était proposée par Pascal : il emploie la méthode combinatoire en faisant les combinaisons de toutes les alternatives de gain ou de perte qui pouvaient fictivement arriver au cours des coups suivants. Loève (1978) résume ainsi ce contexte de la naissance de l'idée de probabilité :

> *(...) On le trouve dans un livre de Pacioli de 1494, dans l'Arithmétique de Forestani de 1603, et Ore dit l'avoir trouvé dans des manuscrits italiens datant de 1380. Toutes les solutions qui en furent données étaient fausses. Ceux qui essayent de le résoudre commencent par montrer que leur prédécesseur a tort : Cardano pour Pacioli, Tartaglia pour Cardano, etc. Roberval, non seulement n'a pu résoudre, mais il a attaqué vivement la solution – correcte – de Pascal. N'en étant pas très sûr, Pascal l'a soumise à Fermat. Ainsi commença la célèbre correspondance de 1654. Elle ne fut publiée qu'en 1679, et en partie seulement, car quelques lettres n'avaient pas survécu.* (Loève, 1978, p. 280).

Notons ainsi un début de changement de point de vue, d'une évaluation naï ve des chances qu'un événement se produise à une description un peu plus théorique des issues qui peuvent

[(9)] Comment répartir les mises dans un jeu de hasard interrompu.

réaliser cet événement, ou à leur dénombrement. La correspondance entre Pascal et Fermat est source d'un grand progrès pour la conceptualisation de la Probabilité (Borovcnik et al., 1991, p. 30). **C'est le premier pas d'un changement de point de vue vers une évaluation des chances dans le domaine du théorique. Mais surtout, ce sont les premières démarches s'autorisant à spéculer sur la poursuite d'un processus aléatoire, à « *imaginer des parties feintes* » selon les termes de Fermat, afin de mieux dénombrer «*les chances* » de tel ou tel joueur**.

Dans sa lettre du 29 juillet de 1654, Pascal propose une solution au problème des partis en utilisant une méthode de récursivité du calcul des espérances des gains futurs. Ensuite il reprend la solution proposée par Fermat : le dénombrement des cas possibles et favorables, intervenant dans l'hypothèse où la partie serait poursuivie. Pascal constate que les deux raisonnements conduisent à la même réponse pour déterminer la répartition des mises entre les joueurs. Pascal et Fermat introduisent à ce moment l'idée de ce qui devrait se passer s'il « *existait la possibilité de la continuation du jeu et si ce jeu était équitable* ». (Borovcnik et al., 1991, p. 31).

Pascal, dans son adresse à l'Académie Parisienne à la fin de 1654, soulignera l'importance de cette découverte de la *« Géométrie du Hasard »*, mais il ne propose pas de définition explicite de la probabilité.

> *Une recherche toute nouvelle et portant sur une matière entièrement inexplorée, savoir sur les combinaisons du hasard dans les jeux qui sont soumis, ce qu'on appelle dans notre langue française "aire les parties des jeux", où l'incertitude de la fortune et si bien dominée par la rigueur du calcul que, de deux joueurs, chacun se voit toujours assigné exactement ce qui lui revient en justice. Il faut le chercher d'autant plus vigoureusement par la raison que les possibilités sont moindres d'être renseigné par l'expérience. En effet, les résultats ambigus du sort sont à juste titre attribués plutôt au hasard de la contingence qu'à une nécessité de nature. C'est pourquoi la question a erré incertaine jusqu'à ce jour ; mais maintenant, si elle a été rebelle à l'expérience, elle n'a pu échapper à l'empire de la raison. Car nous l'avons réduite en art avec une telle sûreté, grâce à la géométrie, qu'ayant reçu part à la certitude de celle-ci, elle progresse désormais avec audace, et que, par l'union ainsi réalisée entre les démonstrations des mathématiques et l'incertitude du hasard, et par*

> *la conciliation entre les contraires apparents, elle peut tirer son nom de part et d'autre et s'arroger à bon droit ce titre étonnant : "Géométrie du hasard".* (Mesnard, 1991, p. 1134-1135).

La démarche suivie par Pascal et Fermat n'est pas encore décontextualisée ni théorisée, même si Fermat dégage l'idée de probabilité issue des dénombrements des cas (Henry, 1994, p. 18). Et même sans décontextualiser, cette approche, due à Pascal et Fermat, permet un pas en avant vers l'application correcte du rapport *favorable et possible* :

> *L'approche de Pascal et de Fermat jette une lumière sur l'application correcte du rapport entre favorable et possible, mais ils n'ont accompli aucun progrès en définissant un concept pour clarifier la nature même de la probabilité. Ils ont employé la probabilité pragmatique ; l'égalité des chances des résultats dans les jeux de hasard leur a semblé être intuitivement évidente. Les jeux de hasard ont servi de lien entre l'intuition et les concepts en développement aussi comme un outil pour structurer des phénomènes réels.* (Borovcnik et al., 1991, p. 31) [(10)].

Nous observons ici les premiers indices d'une dualité de la notion de probabilité, due au conflit entre l'appréhension perceptive des chances de réalisation d'un événement (degré de crédibilité) et rapport des issues favorables et possibles. Cette dualité exprimée par Loève dans l'extrait ci-dessous :

> *Dès lors commence le conflit entre probabilité au sens de degré de crédibilité et probabilité au sens de proportion des chances. Cette dualité donnera naissance à des fleuves d'encre arrosant, entre autres, presque tous les ouvrages sur le Calcul des Probabilités. Ces fleuves coulent encore, mais ne passent plus près du Calcul des probabilités moderne.* (Loève, 1978, p. 281).

Ainsi dès la création de la notion de probabilité, on peut constater la naissance de ce conflit, entre la perception expérimentale au sens d'estimation des chances et son usage plus théorique au sens de rapport de cas.

[(10)] Pascal and Fermat's approach sheds light on the correct application of the favorable to possible rule but they made no progress in defining a concept to clarify the nature of probability. They used probability pragmatically ; the equal likehood of outcomes in games of chance seemed to be intuitively obvious to them. Games of chance served as a link between intuition and developing concepts as well as a tool to structure real phenomena.

Intervenant dans l'élégante récursivité proposée par Pascal, la notion d'espérance de gain a été reprise par Huygens quelques années plus tard. D'après Borovcnik et al. (1991), cette méthode permet la production de solutions à plusieurs problèmes connus à l'époque. Huygens réalise ainsi une contribution assez importante au développement de la notion de probabilité : la formalisation de la notion de *droit d'espérer*, exprimée aussi sous le nom de *valeur de la chance*. Nous pouvons reprendre linterprétation de J.-F. Pichard (1997) sur ce que Huygens entend par jeu équitable et ses propositions pour le calcul des chances dans ce type de jeu, dans cet extrait de *De ratiociliis in ludo aleae,* publiée en 1657 :

> *Je pars de l'hypothèse que dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire par un jeu qui ne vise au détriment de personne.*
>
> *(...) Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut* $\frac{a+b}{2}$.
>
> *(...) Avoir p chances d'obtenir a et q chances d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut* $\frac{pa+qb}{p+q}$. (Huygens, 1657, cité par Pichard, 1997, p. 113).

Pour conclure sur l'approche dénombrant de la probabilité, fondée sur l'hypothèse d'équiprobabilité, la définition classique n'a été donnée ni par Pascal, ni par Fermat, ni par Huygens. Elle a été indiquée et utilisée par J. Bernoulli avec virtuosité, dès la fin du XVII^{e} siècle. Elle a été enfin retenue comme « *premier principe* » presque un siècle plus tard dans *l'Essai Philosophique sur les Probabilités*, publiée en 1814 par Pierre-Simon Laplace, sur lequel nous reviendrons plus loin. Cette définition est formulée ainsi par Laplace : ***« La probabilité d'un événement est égale au rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles. »***

Ainsi, nous dégageons **une évaluation théorique des chances de réalisation d'un événement : par le dénombrement de ses possibilités, en supposant l'égalité des chances pour chacune d'elles**.

§2.2. L'approche fréquentiste

Un élargissement important de conception sur la nature de la probabilité est obtenu par J. Bernoulli dans Ars Conjectandi. Il met clairement en évidence la dualité de l'approche de ce concept : rapport des cas ou estimation de sa valeur par la fréquence observée expérimentalement ? La publication de l'*Ars Conjectandi* en 1713 est appréciée comme la première étape dans la théorisation du Calcul des Probabilités (Loève, 1978, p. 282 ; Stigler, 1986, p. 64). Dans cette œuvre, Jacob Bernoulli commence par résoudre cinq problèmes posés par Huygens de calcul d'une probabilité dans un cadre combinatoire, en les généralisant et les approfondissant. Mais la quatrième partie de cette œuvre est le point de départ de l'application des probabilités à d'autres contextes que ceux des jeux de hasard. (Pichard, 1997, p. 119). L'extrait ci-dessous met en évidence le changement d'approche de la notion de probabilité par l'explicitation de la relation entre fréquence et probabilité :

> *Le progrès conceptuel, cependant, soutenant la justification du lien entre les fréquences relatives et les probabilités n'a pas été maîtrisé avant Jacob Bernoulli (1713). Il a travaillé pendant plus de 20 ans sur la loi des grands nombres, qu'il a appelé le « théorème d'or ». Ce théorème montre que les fréquences relatives, dans un certain sens, convergent vers la probabilité, ce qui justifie l'utilisation de la probabilité dans d'autres contextes que des jeux.* (Borovcnik et al., 1991, p. 33) [11].

Dans la quatrième partie de l'Ars Conjectandi, J. Bernoulli met en évidence la limitation de la détermination d'une probabilité par dénombrement. Cette limitation est due à la nécessité de supposer dans ce cas l'équiprobabilité des événements élémentaires. D'après Henry (1994), Bernoulli montre que :

> *Cette nécessité exclut l'application de la doctrine des chances aux phénomènes naturels complexes comme : l'apparition d'une maladie ou les phénomènes météorologiques, ou encore la prévision des stratégies choisies par des joueurs dont les comportements sont imprévisibles.* (Henry, 1994, p. 22).

[11] "*The conceptual progress, however, underpinning the justification for the link between relative frequencies and probabilities, was not mastered before James Bernoulli (1713). He worked for over 20 years on the law of large numbers that he called « theorema aureum ». This theorem proves that the relative frequencies, in some sense, converge to the underlying probability. It justifies the use of probability in contexts outside games*".

Pour évaluer une probabilité dans ce contexte, J. Bernoulli propose la détermination a posteriori de la probabilité d'un événement attendu, après observation d'un grand nombre d'expériences semblables. Pour cette détermination, il suffisait, selon Bernoulli, d'estimer la probabilité de cet événement par sa fréquence stabilisée, observée expérimentalement. Reprenons alors l'extrait déjà présenté au paragraphe §1.4 de ce chapitre, en ajoutant la suite du texte de Bernoulli qui évoque cette démarche fréquentiste :

> *Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins* ***a posteriori****, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables ; car on doit présumer que, par la suite, chaque fait peut arriver et ne pas arriver dans le même nombre de cas qu'il avait été constaté auparavant, dans un état de choses semblables, qu'il arrivait ou n'arrivait pas.*
>
> *(...)Enfin il ne peut échapper à personne que, pour juger par ce moyen de quelque événement, il ne suffirait pas d'avoir fait choix d'une ou de deux expériences : tout être des plus stupides, par je ne sais quel instinct naturel, par lui-même et sans le guide d'aucun enseignement (chose absolument admirable) tient pour évident que, plus on aura recueilli de nombreuses observations de ce genre, moins grand sera le danger de s'écarter du but.* (Bernoulli, 1713, p. 42-44).

Ainsi, selon les termes de Borovcnik et al. (1991), à partir de ce changement de statut de la probabilité, nous pouvons dégager **une nouvelle manière d'estimer les chances de réalisation d'un événement : la méthode expérimentale.** Une telle approche suppose que la probabilité est une donnée objective attachée à l'événement et à l'expérience. Cette estimation est justifiée par la convergence de la suite des fréquences observées, données intrinsèques à l'expérience répétée, indépendamment de la position subjective de l'observateur. La définition proposée par Rényi (1966) présente de façon claire cette approche :

> *Nous appellerons probabilité d'un événement le nombre autour duquel oscille la fréquence relative de l'événement considéré. (...) Nous considérons donc la probabilité comme une valeur indépendante de l'observateur, qui indique approximativement avec quelle fréquence l'événement considéré se produira au cours d'une longue série d'épreuves.* (Rényi, 1966, pp. 25-26).

L'auteur présente un peu plus loin dans son texte, une "définition" de la probabilité :

> *La "définition" de la probabilité comme valeur autour de laquelle oscille la fréquence relative n'est pas une définition mathématique mais une description du substrat concret du concept de probabilité. La loi des grands nombres de Bernoulli, par contre, est fondée sur la définition mathématique de la probabilité.* (Rényi, 1966, p. 144).

Nous pouvons constater que pour Bernoulli l'expérimentation pouvait conduire à une probabilité objective sous la condition d'un grand nombre de répétitions de l'expérience. Prenons encore un extrait qui confirme cette affirmation :

> *Cette approche empirique de la détermination des chances n'était pas nouvelle avec Bernoulli, il ne l'a pas considérée lui-même comme nouvelle. Ce qu'il y eut d'original, ce fut la tentative de Bernoulli de donner un traitement formel à la notion, vague, que plus on accumule de données sur la proportion inconnue des cas, plus nous aurons une certitude à propos de cette proportion.* (Stigler, 1986, p. 65) (12).

Dans ce contexte, l'expression «*traitement formel* » utilisée par l'auteur fait référence au fait que Bernoulli part d'une expérience théorique avec des hypothèses de modèle.

§2.3. La prise en compte du continu : la probabilité géométrique

Puisque le cadre géométrique nous sera fort utile pour notre ingénierie didactique, citons ici, dans ce bref parcours historique sur l'évolution de la notion de probabilité, l'utilisation d'éléments géométriques pour le calcul effectif des chances dans un contexte de jeu de hasard. La notion de «*probabilité géométrique »* a été introduite par Georges Louis Leclerc, comte de Buffon, mathématicien et naturaliste français du XVIII^e^ siècle. Dans un contexte social dans lequel les jeux de hasard prolifèrent de façon assez importante, en France après la mort de Louis XIV, Buffon présente le *Jeu de Franc-Carreau* dans un mémoire à l'Académie Royale des Sciences, en 1733. Ce jeu consiste à jeter une pièce de monnaie au-dessus d'un carrelage de carreaux égaux d'une forme quelconque. Les joueurs parient sur la position finale :

---

(12) "*Now this empirical approach to the determination of chances was not new with Bernoulli, nor did he consider it to be new. What was new was Bernoulli's attempt to give formal treatment to the vague notion that the greater the accumulation of evidence about unknown proportion of cases, the closer we are to certain knowledge about that proportion*."

tombera-t-elle entièrement sur un seul carreau (franc-carreau), ou bien sur un ou plusieurs joints entre des carreaux ?

Dans la publication *Le Jeu de Franc-Carreau, une activité probabiliste au collège*, par le Groupe Statistique de l'IREM de Rouen, nous trouvons le rapport de Clairaut et de Maupertuis sur ce premier mémoire :

> *Nous avons examiné, par ordre de l'Académie, un mémoire sur le jeu du franc-carreau par M. Leclerc.*
> *Jusqu'ici, pour la détermination des parties dans les jeux de pur hasard, l'on n'a fait entrer que la considération des nombres, parce que, dans la plupart de ces jeux, tout se réduit à certains nombres des cas avantageux et des cas désavantageux, indépendamment de la figure des choses avec lesquelles on joue. Il n'en est pas de même du franc-carreau.*
> *Les problèmes de ce jeu, qui se joue ordinairement avec une pièce ronde, dépendent de la considération du diamètre de cette pièce et des dimensions des carreaux. Voilà le cas le plus simple et premier dont M. Leclerc résout les questions (...)* (Badizé et al., 1996, p.7).

Buffon, dans son *Essai d'Arithmétique Morale*, publié en 1777, explique l'utilisation de la géométrie dans la Théorie des Probabilités :

> *L'analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour, dans la science des probabilités, pour déterminer et fixer les rapports du hasard ; la géométrie paraissait peu propre à un ouvrage aussi délié ; cependant si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnaître que cet avantage de l'analyse sur la géométrie est tout à fait accidentel, et que le hasard, selon qu'il est modifié et conditionné, se trouve du ressort de la géométrie, aussi bien que de celui de l'analyse : pour s'en assurer, il suffira de faire attention que les jeux et les questions de conjecture ne roulent ordinairement que sur des rapports de quantités discrètes ; l'esprit humain, plus familier avec les nombres qu'avec les mesures de l'étendue, les a toujours préférés ; les jeux en sont une preuve, car leurs lois sont une arithmétique continuelle ; pour mettre donc la géométrie en possession de ses droits sur la science du hasard, il ne s'agit que d'inventer des jeux qui*

> *roulent sur l'étendue et sur ses rapports, ou calculer le petit nombre de ceux de cette nature qui sont déjà trouvés. Le jeu du franc-carreau peut nous servir d'exemple : voici ses conditions qui sont fort simples (...)* (Buffon, 1777, cité par Badizé et al., 1996, p. 11).

Dans cet extrait, Buffon continue en expliquant la façon de jouer à ce jeu. Les règles qu'il propose ne spécifient pas la figure géométrique pour le carrelage : « *Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu.* » (Buffon, 1777, cité par Badizé et al., 1996, p. 11).

D'après ces auteurs, même si Buffon n'apporte pas un grand progrès à la notion de probabilité, il apporte des éclairages nouveaux par la considération *« d'un nombre de cas ayant la puissance du continu, et la première expérimentation statistique pour valider une hypothèse. »* (Badizé et al., 1996, p. 9).

Ce jeu de Franc-Carreau est à la base de notre expérimentation, car il nous donne la possibilité d'une double approche didactique : le calcul a priori de la probabilité par des considérations géométriques et l'estimation par l'analyse des résultats obtenus expérimentalement lors d'une simulation informatique. Nous reviendrons plus loin sur ce choix.

§2.4. La probabilité subjective

Une nouvelle approche de la probabilité est introduite par Thomas Bayes, dans un essai qui a été publié en 1763, deux ans après sa mort : la notion de **probabilité a priori, ayant observé une conséquence a posteriori**. D'après M. Henry (1994), Bayes introduit en effet deux notions de probabilité :

> *Considérant la probabilité d'un événement comme une mesure physique, sans information sur celle-ci, il postule a priori la répartition uniforme de ses valeurs possibles, quitte à la réajuster a posteriori.*
>
> *Il introduit ainsi deux notions de probabilité : la première, que l'on cherche à estimer, est objective, la seconde, appréciant la valeur possible de la précédente, posée a priori, est subjective.* (Henry, 1994, p. 25).

Selon B. Bru (1981), Bayes est le premier à faire le glissement de la notion de probabilité, de l'objet mathématique vers la notion subjective au sens naïf.

> *Bayes, pour la première fois, va laisser déraper la probabilité – objet mathématique que la géométrie du hasard a extrait de la description probabiliste vers la probabilité au sens du dictionnaire Larousse : à une notion subjective (toutes les informations qui fondent notre intime conviction) il associe un objet mathématique (formel) : une loi de probabilité et en utilise les propriétés pour remonter au réel.* (Bru, 1981, p. 147).

L'auteur précise le sens donné à la probabilité subjective : même si mathématiquement identique à la probabilité de la géométrie du hasard, elle correspond à un jeu qui ne serait joué qu'une seule fois, elle doit prendre en compte un certain nombre d'informations. Le développement de cette nouvelle appréhension de la notion de probabilité par le glissement de l'objectif vers le subjectif conduit aux méthodes bayésiennes en statistiques, très utilisées de nos jours. Par contre, même si la probabilité subjective prend en compte les informations obtenues expérimentalement pour ajuster les appréciations faites a priori (Borovcnik et al., 1991, p. 42), cette appréhension ne rentre pas dans le cadre de l'approche fréquentiste préconisée dans le programme des classes de première de 1991, car elle prend comme hypothèse de base *un jeu qui ne serait joué qu'une seule fois*. (Henry, 1994, p. 27). La présentation d'une conception bayésienne pose donc des problèmes didactiques non négligeables.

§2.5. Pierre-Simon Laplace et la définition classique de la probabilité

En restant dans notre objectif de dégager les différentes appréhensions de la notion de probabilité dans l'histoire, faisons un saut dans le temps pour arriver au début du XIX^{e} siècle. Nous arrivons ainsi à la première présentation axiomatique du calcul des probabilités, contenant la définition explicite de la probabilité donnée en premier principe par Laplace dans son *Essai Philosophique sur les Probabilités*, publié en 1814. Avec Laplace, nous sommes amenés à une compréhension théorique de la probabilité, en tant qu'objet mathématiquement défini. Son travail reprend et développe tous les résultats probabilistes obtenus par ses prédécesseurs et ses contemporains. (Bru, 1981, p. 151).

Laplace donne ainsi la définition de base, limitée par l'hypothèse d'équiprobabilité. Cette limitation est, d'ailleurs, mise en évidence par Laplace lui-même :

> *La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité.* (Laplace, 1814, p. 35).

L'extrait ci-dessous montre la définition donnée par Laplace, largement utilisée jusqu'à nos jours dans l'enseignement :

> *Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles est la mesure de cette probabilité qui n'est ainsi qu'une fraction, dont le numérateur est le nombre de cas favorables et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles.* (Laplace, 1814, p. 35).

Mais après avoir donné cette définition, Laplace apporte dans son deuxième principe la clé de l'élargissement de ce concept, laissant la place à la conception moderne en termes de mesure :

> *Mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable.* (Laplace, 1814, p. 38).

Dans une situation dans laquelle on n'a aucune information sur la possibilité des divers cas possibles, une démarche subjective consiste à postuler l'équiprobabilité sur ces différents cas. C'est une démarche de type bayésienne qui repose sur un « *principe d'indifférence* » selon lequel l'attitude a priori la plus raisonnable dans cette situation est de ne pas accorder plus d'importance à un cas qu'à d'autre. C'est en application de ce principe que Laplace peut énoncer :

> *La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité.* (Laplace, 1814, p. 35).

§2.6. La prise en compte de la dualité de l'approche de la notion de probabilité

Nous retenons l'existence d'une sorte de dualité pour l'appréhension de la notion de probabilité due à la coexistence des approches laplacienne et fréquentiste. Cette dualité peut engendrer des obstacles d'ordre épistémologique et didactique lors de la conceptualisation de la probabilité en situation scolaire.

Plusieurs travaux de recherche suggèrent une "classification" de la notion de probabilité selon trois approches : classique (laplacienne), fréquentiste et bayésienne (subjective). Dans la suite de ce travail, nous nous limiterons aux deux premières. Nous proposons une démarche de modélisation pour laquelle l'évaluation d'une probabilité simple dans une situation de succès-échec sera faite à partir de l'analyse de l'urne de Bernoulli qui la représente. Cette démarche doit permettre le passage d'une appréciation de la probabilité faite expérimentalement de manière perceptive, à un calcul effectif de cette valeur dans le domaine théorique : l'assimilation à la proportion de deux couleurs de boules dans la composition de l'urne de Bernoulli. Elle nous permettra aussi de sortir de la nécessité de l'hypothèse d'équiprobabilité, présente dans l'approche laplacienne, pour élargir les contextes dans lesquels nous pouvons présenter des situations aléatoires et certaines expériences-types.

§3. Modèle et modélisation

§3.1. La notion de modèle

Nous partons d'une acception généralement partagée de la notion de modèle, trouvée dans le dictionnaire Larousse.

> « Modèle [13] : n.m., toute structure logique ou mathématique formalisée, utilisée pour rendre compte d'un ensemble de phénomènes qui, bien que n'ayant pas de lien de causalité univoque, possèdent entre eux certaines relations. »

Cette acception est insuffisante d'un point de vue scientifique car elle est trop générale, trop vague. Dans la suite de ce paragraphe, nous préciserons la définition de modèle que nous utiliserons dans le cadre d'une didactique des probabilités. Nous partirons d'un regard sur plusieurs approches de la notion de modèle dans quelques champs de connaissances comme celui des Sciences Expérimentales. L'objectif de ce paragraphe est ainsi d'arriver à distinguer différents niveaux de modèles dans le cadre d'un processus de modélisation en probabilités,

[13] Larousse : Dictionnaire de la langue française – lexis, pp. 1171. Paris : Larousse.

ce qui nous sera très utile dans la suite de cette étude.

Une définition naïve d'un modèle mathématique, assez semblable à celle qui est donnée dans les dictionnaires, en vue de donner une définition opératoire, est présentée par Israel (1996, p. 18) : *« Une représentation en langage mathématique d'un aspect de la réalité, que cet aspect existe déjà ou qu'il s'agisse de le réaliser. »*

Nous remarquons dans cette définition la nécessité d'une délimitation de la réalité par un choix des propriétés à retenir, pour la représenter au moyen de différents modèles. Cette délimitation, qui conduit à la représentation théorique de certains aspects stricts des situations de la réalité, rend au modèle le statut de représentation locale de la réalité qu'on veut théoriser. Un modèle est alors la représentation locale d'une perception du réel que l'on a choisi d'organiser au travers d'une description simplifiée.

On trouve par exemple en Sciences Physiques ce type de délimitation pour représenter théoriquement certaines propriétés locales de la réalité. Cette utilisation est bien proche de celle qu'on adopte dans une démarche probabiliste de modélisation : « *(...) Un modèle est donc un outil rationnel construit au moyen d'un langage en vue de permettre l'étude d'une réalité empirique locale parfaitement circonscrite à un ensemble de phénomènes déterminé.* » (Robardet et Guillaud, 1997, p. 98).

Le modèle offre ainsi une certaine lecture et une certaine interprétation de la réalité, simplifiée par des choix des propriétés à retenir et en conséquence, une façon particulièrement économique de représenter cette réalité : « *Un modèle est une représentation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel, ou d'un système de relations, ou d'un processus évolutif, issus d'une description de la réalité.* » (Henry, 1997, p. 78).

La construction d'un modèle ou la reconnaissance de sa configuration [(14)] doit mettre en jeu : « *(...) une certaine abstraction du domaine de la réalité concernée, en ne retenant de ce dernier qu'un certain ensemble d'objets et de relations qui sont représentés dans le modèle.* » (Laborde, 1994a, p. 525).

Nous faisons la distinction entre deux domaines :

- **le domaine de la réalité**, dans lequel se trouve la situation de la réalité qu'on veut modéliser ;

[(14)] Nous utilisons le mot configuration au sens de Jahn (1998) : «*figure (ou représentation) porteuse d'une propriété didactiquement sélectionnée* ». (Jahn, 1998, p. 87).

- **le domaine théorique**, dans lequel on construit le modèle qui doit simplifier et être outil d'interprétation des caractères locaux de la réalité, caractères retenus pour la modélisation par un choix du sujet.

Le choix de ces caractères locaux a pour conséquence la définition d'un sous-domaine à l'intérieur de chacun des domaines que nous venons de présenter. Ainsi, à chaque modèle est associé un *domaine de fonctionnement* dans le domaine de la réalité. Ce domaine de fonctionnement dépend ainsi des objets et relations retenus pour être interprétés.

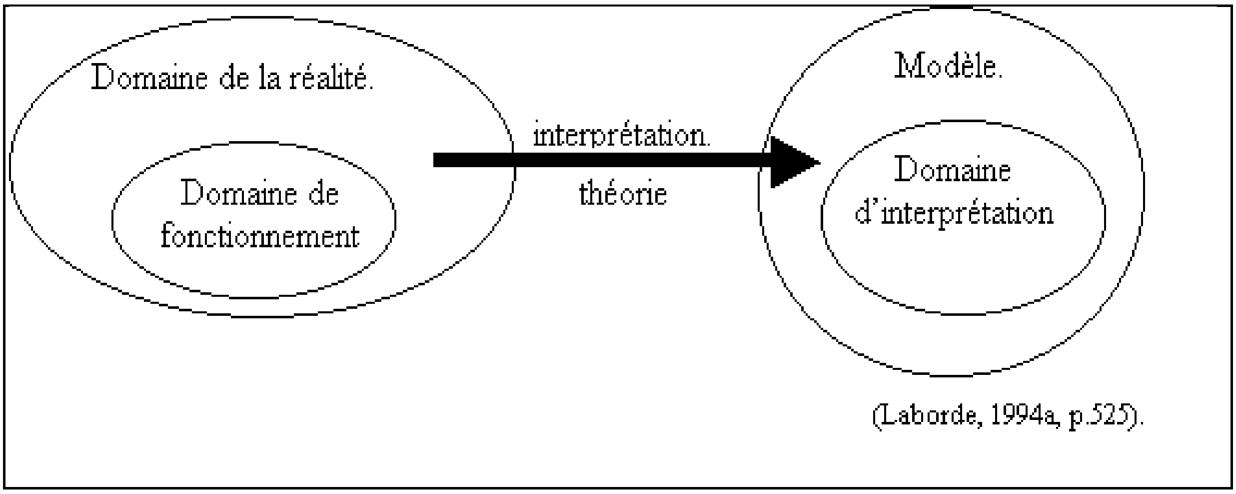


Schéma 2

§3.2. Le modèle probabiliste

La notion de modèle probabiliste est attachée à la description des issues possibles de l'expérience que l'on veut modéliser (Borovcnik et al., 1991). Cela signifie que la modélisation d'une expérience aléatoire passe par le choix, par l'explicitation de l'objet que l'on veut étudier en réalisant cette expérience. Ainsi, cette description en langage courant doit être faite à l'intérieur du domaine de fonctionnement, et doit aboutir à une représentation théorique, en langage probabiliste, qui se trouve à l'intérieur du domaine d'interprétation du modèle.

Prenons un exemple. Supposons que l'expérience consiste à faire tourner une roulette partagée en deux secteurs A et B, selon la figure ci-contre. Il nous faut expliciter l'objectif de cette expérience, le type de résultat que l'on souhaite retenir. Nous pouvons, par exemple, nous intéresser au nombre de rotations avant l'immobilisation de la roulette, par la vitesse de ces rotations, ou encore par la position finale précise d'un pointeur par rapport à la surface de la

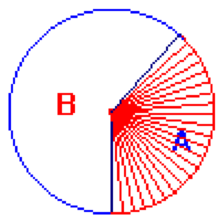


Figure 1

roulette. Cette description suffisamment précise des choix des résultats de l'expérimentation en jeu que l'on va retenir pour la modélisation permet d'expliciter le domaine de fonctionnement attaché au modèle en construction. Ce processus doit aboutir à une représentation théorique du type (Ω, P), dont le domaine théorique est l'espace probabilisé. Autrement dit, le couple (Ω, P) est le modèle dans le domaine théorique qui représente l'expérimentation en jeu dans le domaine de la réalité. Nous avons ainsi l'ensemble Ω dont les éléments représentent les résultats possibles de l'expérimentation en jeu, P étant la distribution de probabilités sur cet ensemble. Dans notre exemple,

$$\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2\}$$
$$P(\omega_1) = p \qquad\qquad P(\omega_2) = q$$
$$\text{et} \quad p + q = 1$$

Il est à noter que nous nous intéressons particulièrement aux modèles de Bernoulli, modèles où Ω peut être donné avec deux éléments et P par les deux valeurs p et q des probabilités associées.

Revenons à l'expérience ci-dessus, consistant à faire tourner une roulette partagée en deux secteurs. Explicitons son domaine de fonctionnement. Nous pouvons, par exemple, étudier la position précise d'un pointeur après immobilisation de cette roulette. Dans ce cas, les résultats possibles sont l'identification du secteur de la roulette indiqué par le pointeur, A ou B. Nous pouvons alors identifier les propriétés suivantes, qui caractérisent de façon simplifiée cette situation de la réalité :

- ✓ Il existe une composante d'imprévisibilité dans la situation : on ne peut pas connaître à l'avance la position du pointeur ;
- ✓ On peut clairement identifier la position finale du pointeur. C'est-à-dire que nous pouvons préciser d'avance les résultats possibles de cette expérimentation. Ainsi, dans le domaine de fonctionnement, les résultats possibles seront donnés par le couple (A, B) des secteurs qui partagent la roulette. Ainsi, le modèle est donné par un ensemble $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2\}$. Les éléments ω_1 et ω_2 sont les représentants, dans le domaine d'interprétation, des deux événements A et B qui sont à l'intérieur du domaine de fonctionnement attaché à ce modèle.
- ✓ L'expérience peut être reproduite autant de fois qu'on le veut, au moins par la pensée.

À partir de la distribution de probabilité P on peut définir une variable aléatoire dite «de Bernoulli », appliquant Ω sur {0 ; 1} et dont la loi P_X est entièrement donnée par :

$$P_X(\{1\}) = P(X = 1) = P(\{\omega_1\}) = p$$

§3.3. Évolution de la notion de modèle

Interrogeons l'histoire pour essayer de comprendre l'évolution du concept de modèle probabiliste. Nous nous intéressons aux conditions dans lesquelles l'ensemble Ω est introduit et à la définition d'une distribution de probabilité sur cet ensemble.

Les premières descriptions des résultats possibles d'une expérience aléatoire, en l'occurrence dans le cadre des jeux de hasard, ont été obtenues par le dénombrement des possibilités, comme nous l'avons indiqué au premier paragraphe de ce chapitre. Dans ce raisonnement combinatoire, encore construit dans le domaine de la réalité par le dénombrement des résultats possibles du jeu, on fait l'hypothèse d'égalité des chances sur ces résultats. Dans le domaine théorique, cela conduit à faire l'hypothèse d'équiprobabilité sur les événements élémentaires qui composent l'ensemble Ω représentant tous ces résultats possibles.

Une des difficultés issues de ce type de démarche, est de conduire à un ensemble Ω pas toujours le plus adéquat. Par exemple, lors qu'on jette deux pièces ou deux dés : ces objets sont-ils distinguables ou pas ? Les résultats obtenus pour chacun des objets sont-ils indépendants ou pas ? Doit-on prendre en compte l'ordre des résultats lors d'un jet ou pas ? L'introduction d'un ensemble Ω modèle ne doit pas se limiter systématiquement à des événements qui sont observables. En effet, les choix des ensembles Ω modèles sont de plusieurs natures : modèle approximatif, adéquation au problème posé, simplification d'une complexité, réduction à un système de cas équiprobables, etc.

Citons l'exemple historique de difficulté engendrée par la possibilité de choisir parmi plusieurs modèles pour représenter une même situation de la réalité, présenté par D'Alembert (1784) dans son article *Croix ou Pile* (Pile ou face) dans l'Encyclopédie :

> *Ce jeu, qui est très connu, et qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amènera "croix" en jouant deux coups consécutifs ; la réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs, et suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons.*

Premier coup.	*Second coup.*
Croix.	*Croix.*
Pile.	*Croix.*
Croix.	*Pile.*
Pile.	*Pile.*

> *De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre et trois font gagner ; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. (...) Cependant cela est-il bien exact ? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent "croix" au premier coup ? Car, dès qu'une fois "croix" est venu, le jeu est fini, et le second coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :*
>
> *Croix, premier coup.*
>
> *Pile, Croix, premier et second coup.*
>
> *Pile, Pile, premier et second coup.*
>
> *Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier.*
>
> (D'Alembert, 1784, p. 471).

Notons que dans son raisonnement, D'Alembert fait le choix de refuser de prendre en compte un deuxième lancer lors qu'on obtient le résultat "croix" au premier coup. Ainsi, même si les quatre couples de piles et croix constituent des résultats fictivement possibles si l'on jouait réellement en deux coups, D'Alembert ne les considère pas car il arrête le jeu lors du premier succès envisagé : l'obtention de "croix" comme première issue. Retenant un modèle Ω à trois éléments, il propose néanmoins l'équiprobabilité. Cet exemple montre bien que, selon nos choix d'hypothèses de modèle, selon la délimitation du domaine de fonctionnement, ce modèle ainsi obtenu peut ne pas être suffisamment adéquat à la réalité que l'on veut représenter. Une autre proposition pour ce modèle serait la distribution ½ ¼ et ¼ pour P.

Remarquons ainsi qu'il y a plusieurs modèles qui peuvent représenter une même situation de la réalité, construits à partir de différents choix d'hypothèses, mais qui ne sont pas tous nécessairement adéquats à l'interprétation de cette réalité.

Quelle démarche didactique pouvons-nous utiliser pour mettre en évidence les conflits de modèles que ces différents choix peuvent engendrer ?

On trouve chez Bernoulli (1713) une présentation simplifiée pour la description de l'ensemble des issues possibles, dans laquelle cet ensemble est réduit à deux possibilités : succès (cas fertiles) ou échec (cas stériles) :

> *(...) Pour éviter la fatigue d'une circonlocution, j'appellerai "féconds" ou "fertiles" les cas dans lesquels un événement peut se produire, et "stériles" ceux dans lesquels le même événement ne peut se produire : de même, j'appellerai expériences "fécondes" ou "fertiles" celles pour lesquelles on constate qu'un des cas fertiles peut survenir, et "inféconds" ou "stériles" celles pour lesquelles on observe qu'un des cas stériles se produit (...)* (Bernoulli, 1713, p. 66).

La dichotomisation en cas fertiles ou stériles nous apporte une simplification d'ordre didactique, lorsque Bernoulli réduit la description des résultats possibles pour le déroulement de la situation aléatoire de la réalité à un ensemble de deux événements. En conséquence, les difficultés logiques ou combinatoires dans cette description disparaissent, ce qui facilite l'explicitation du domaine de fonctionnement pour l'expérimentation en jeu.

Pour la suite de ce travail, au niveau d'un premier approche, nous retenons cette façon simplificatrice de décrire l'ensemble des issues possibles d'une expérience, réduisant la situation à ces deux possibilités : « *succès* » ou « *échec* ». Ainsi nous nous limiterons à l'utilisation du modèle de Bernoulli réduisant Ω à deux éléments. Dans le cadre d'un travail avec des élèves en fin de Collège, nous utiliserons un modèle d'urne de Bernoulli pour représenter ce type de situation : urne abstraite comportant des boules de deux couleurs. Ce modèle n'est pas purement théorique, car il n'est pas exprimé, dans ce travail, en termes d'espace probabilisé. Nous nous limitons à une abstraction faite à partir d'une analogie avec des éléments du domaine de la réalité : urnes et boules. Nous travaillons alors dans un domaine d'appréhension intermédiaire entre le domaine de la réalité et le domaine théorique : ***le domaine pseudo-concret***. Nous reviendrons sur ce point plus loin, dans le chapitre II.

§3.4. Une démarche de modélisation probabiliste

Dans le cadre des Probabilités, de même que dans le cadre des Sciences Physiques, il existe une difficulté très importante à prendre en compte, spécialement en situation d'apprentissage : la difficulté de distinguer la réalité du modèle choisi pour la représenter. Cette difficulté vient du fait que, dans la pratique, ces deux domaines (domaine de la réalité et domaine théorique) sont intimement liés. Cette confusion peut conduire à une présentation d'une situation de la réalité à la fois par l'expérience réelle réalisée et par une référence non contrôlée à un modèle pseudo-concret de cette expérience. Nous mettons en évidence cette tendance à passer de façon implicite de la réalité au modèle, sans identifier les limites de ces deux domaines, ou plutôt sans identifier les hypothèses de modèle qu'on adopte.

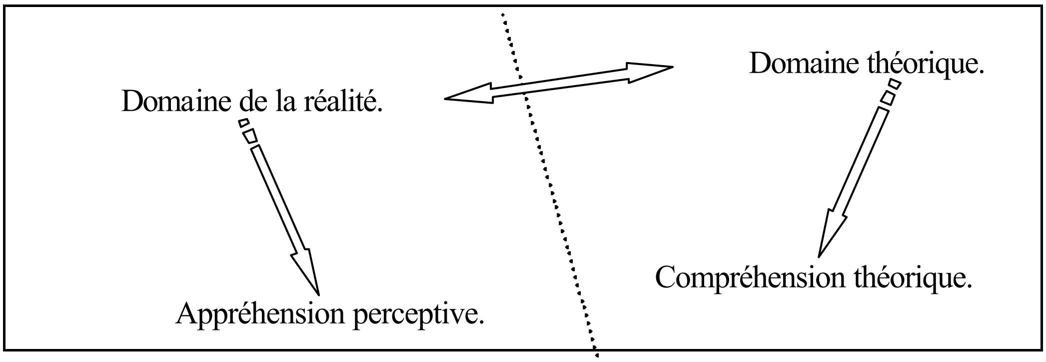


Schéma 3

La définition du concept de modèle donnée par Pavé (1994) introduit la distinction entre réalité et modèle par un processus de modélisation présenté comme une nécessité :

> *La notion de modèle est apparue (en biologie) avec la nécessité de mieux préciser la distinction entre le sujet du monde réel que l'on étudie et la représentation qu'on en trouve à travers un objet mathématique : le modèle mathématique.* (Pavé, 1994, p. 25).

Cette définition étant proche de celle que nous utiliserons en probabilités, nous soulignerons pour notre part le caractère interprétatif du modèle.

Une démarche de modélisation doit aussi conduire à réaliser la liaison entre les concepts mathématiques qui ont une définition précise, et les notions et idées générales qui se dégagent du travail d'exploration de la réalité (Henry, 1997 ; Borovcnik et al., 1991). Cette démarche aboutit non seulement à l'introduction précise d'un modèle probabiliste sous la forme d'un ensemble Ω, muni d'une distribution de probabilité. Nous ferons ainsi une distinction explicite avec les élèves entre le domaine de la réalité, dans lequel se trouve la situation aléatoire qu'on veut modéliser, et le domaine théorique, dans lequel se trouve le modèle choisi pour représenter cette situation.

Conclusion : Délimitation du champ de problèmes sur lequel va porter l'enseignement

La brève présentation historique et épistémologique des notions probabilistes de base (l'idée de hasard et les notions de probabilité et de modèle probabiliste) nous montre quelques éléments que nous devrons prendre en compte dans ce travail.

Nous mettons en évidence les différents domaines dans lesquels il faut placer les élèves lors de la résolution d'un problème dans le cadre probabiliste : l'appréhension du hasard se réalise dans le domaine de la réalité, alors que la notion de probabilité et de modèle probabiliste appartiennent au domaine du théorique ou formel. Cette difficulté didactique est inséparable de l'obstacle épistémologique qui est engendré par la dualité de la notion de probabilité.

Vis-à-vis de ces difficultés d'ordre psychologique, épistémologique et didactique lors de l'apprentissage des probabilités, nous retiendrons quelques aspects présentés dans ce chapitre, qui seront à la base de notre problématique didactique :

- Nous évacuons toute réflexion d'ordre philosophique à propos de l'idée de hasard. Nous limiterons notre étude à la mise en évidence des éléments qui permettent aux élèves de reconnaître dans les situations de la réalité l'effet du hasard quand se produit un événement ou son contraire ;
- En conséquence, nous nous limitons à l'étude des situations aléatoires reproductibles qui peuvent être représentées par des tirages *au hasard* dans une population bien déterminée.
- Le champ de problèmes sur lequel va porter ce travail est donc celui de l'enseignement de la modélisation des situations aléatoires simples que l'on peut représenter par une urne de Bernoulli.

Nous prenons aussi en compte les difficultés que la dualité d'approches de la notion de probabilité peut engendrer, mise en évidence dans le §2.6 de ce chapitre. Nous admettons qu'une démarche de modélisation peut donner aux élèves la possibilité de choisir entre les deux approches, l'approche expérimentale ou l'approche laplacienne, pour évaluer les chances d'obtenir un succès lors de la réalisation d'une expérimentation.

Nous nous posons alors la question suivante : **quel enjeu didactique peut avoir le conflit de modèles engendré par la coexistence de ces deux approches lors de la résolution d'un problème de modélisation probabiliste, du travers d'un modèle d'urne de Bernoulli ?**

<u>CHAPITRE II</u> : UNE APPROCHE DIDACTIQUE DE QUELQUES NOTIONS PROBABILISTES ÉLÉMENTAIRES

Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons, d'un point de vue didactique, une étude de la présentation de quelques notions probabilistes de base, afin de permettre aux élèves au niveau du Collège de s'engager dans un travail sur l'aléatoire. L'objectif de ce chapitre est aussi d'établir un vocabulaire approprié à l'usage de ces élèves, pour aboutir à l'explicitation du modèle d'urne de Bernoulli choisi pour représenter le processus aléatoire en jeu.

Dans le chapitre I nous avons délimité le champ de problèmes sur lequel va porter l'enseignement : les situations aléatoires reproductibles qui peuvent être associées à un tirage au hasard dans une population produisant deux résultats possibles, succès ou échec. Nous étudions alors les conditions didactiques nécessaires à la mise en fonctionnement d'une démarche de modélisation de cette classe de situations aléatoires qui soit accessible aux élèves dès la classe de troisième.

Nous nous proposons ainsi de répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les conditions didactiques nécessaires pour qu'un élève au niveau du Collège puisse passer d'une appréhension perceptive d'un processus aléatoire, qui évolue dans le domaine de la réalité, à l'explicitation de sa représentation en termes de modèle d'urne de Bernoulli ?
- Quelles sont les connaissances préalables nécessaires pour qu'un élève au niveau du collège puisse s'engager dans un tel travail de modélisation probabiliste ?

§1. La modélisation et le contexte de l'enseignement

Ce paragraphe a pour objectif de présenter l'enseignement de la modélisation tel qu'il se dégage des programmes actuels en cycle central du Collège (5^e et 4^e), en cycle d'orientation (3^e) et en classe de Seconde, classe de détermination. Nous nous intéressons particulièrement à un enseignement intégrant la modélisation comme outil et non à l'enseignement de la modélisation. Autrement dit, nous étudions les contenus et les contextes dans lesquels la modélisation est proposée pour permettre aux élèves de s'engager dans un travail sur l'aléatoire dès le Collège.

Revenons à la lecture des programmes actuels de Collège et de la classe de Seconde. Nous soulignons que pour le développement de ce paragraphe, nous nous limitons à une lecture des programmes actuellement en vigueur. Nous utilisons les textes officiels (programmes et documents d'accompagnement des programmes) disponibles sur le site « http://www.cndp.fr ». Pour la classe de seconde, rentrée 2000, nous utilisons le programme de Seconde publié dans le B. O. hors-série, n°6, du 12 août 1999, aussi que du document d'accompagnement de ce programme, version janvier 2000.

Une lecture de ces programmes montre que la compréhension et la représentation rationnelle de leur environnement par les élèves sont des objectifs communs aux Mathématiques et à d'autres disciplines dès le cycle central (5^e^ et 4^e^). Illustrons cette remarque par quelques extraits des programmes de Physique-Chimie et de Mathématiques dans les sous-paragraphes qui suivent, ainsi que par des documents d'accompagnement contenus dans le Bulletin Officiel n° 10, du 15 octobre 1998, hors-série.

§1.1. La modélisation et les programmes de Physique-Chimie

Les nouveaux programmes de Physique-Chimie présentent des objectifs de modélisation pour tout le cycle central et le cycle d'orientation. Parmi les objectifs d'enseignement, nous remarquons le souci d'amener les élèves à « *élaborer de façon progressive une représentation rationnelle de son environnement.* » (B. O. n° 10, 15 octobre 1998, hors-série).

Sous la rubrique « *Idées Directrices* » pour le cycle central (5^e^ et 4^e^), nous trouvons explicitement un souci d'interdisciplinarité avec les mathématiques au moyen de la description quantitative du monde, cette interaction se manifestant particulièrement au sujet de la mesure : « *La description du monde présentée au collège, en devenant plus quantitative, constitue un champ privilégié d'interdisciplinarité avec les mathématiques*. » (Programmes de 5^e^ et 4^e^, Physique-Chimie, p. 4).

Cette description du monde, les phénomènes aléatoires inclus, est à la fois qualitative, car elle tend à dégager quelques caractéristiques locales, et quantitative, car elle exprime quelques-unes de ces caractéristiques locales au moyen de mesures. Les programmes pour le cycle d'orientation (classe de 3^e^) mettent aussi en évidence l'importance de cette démarche dès les premières lignes :

> *Dans la continuité du programme du cycle central, le programme de troisième part de questions que l'élève est susceptible de se poser*

> *dans son cadre de vie quotidien et le conduit à élaborer de façon progressive une représentation rationnelle de son environnement.* (B.O. n° 10, Programmes Physique-Chimie, classe de 3e, p. 125).

Ce type de description du monde correspond bien à l'esprit de la démarche de modélisation probabiliste. Cette constatation renforce notre proposition d'un premier contact avec les situations aléatoires dans un contexte scolaire éclairé par un accès à leur modélisation.

§1.2. La modélisation et les programmes de Mathématiques

§1.2.1. Les programmes pour le Collège : le cycle central et le cycle d'orientation

> *Les objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques décrits pour les classes antérieures demeurent tout naturellement valables pour la classe de troisième : apprendre à relier des observations à des représentations, à relier ces représentations à une activité mathématique et à des concepts.* (B.O. n°10, 15 octobre 1998, hors série, Programmes, Mathématiques, p. 106).

La démarche de modélisation apparaît explicitement comme un outil propre à développer certains contenus dans le document d'accompagnement des programmes, soit pour le cycle central (5e et 4e) soit pour la classe de Troisième. Pour le cycle central, la partie de ce document intitulée « *Contributions de l'enseignement des mathématiques à l'étude des problèmes de notre temps* » fait appel à la compréhension et à la représentation des phénomènes de la réalité. Cette compréhension est envisagée comme un lien pour l'éducation à la citoyenneté, à l'orientation, à l'environnement (socio-économique, culturel et/ou naturel).

> *La pratique des mathématiques conduit les élèves à acquérir des méthodes, qui sont efficaces aussi bien que pour améliorer la compréhension de phénomènes que pour étayer des prises de décision ou aider à agir (...) Les représentations sont elle-mêmes des objets d'activité mathématique. Grâce à la modélisation, il est, par exemple, possible d'anticiper sur des évolutions et donc de disposer d'instruments d'aide à la décision.* (Accompagnement des programmes du cycle central, Mathématiques, p. 11).

Nous trouvons presque les mêmes réflexions à propos de l'utilisation de la modélisation comme outil de résolution de problèmes, mais surtout comme outil de compréhension et de représentation de la réalité, dans le document d'accompagnement du programme de Mathématiques pour la classe de Troisième :

> *Ils (les élèves) ont été amenés à acquérir des méthodes qui sont efficaces aussi bien pour améliorer la compréhension de phénomènes que pour aider à agir (…) La modélisation permet notamment d'appréhender des situations et d'anticiper sur les évolutions. Les formes d'expression autres que la langue usuelle, se sont enrichies de tous ces outils.* (Accompagnement des programmes de Troisième, Mathématiques, p. 14).

Rubrique « Travaux Géométriques »

Lors de l'explicitation des contenus des programmes pour la classe de 5^{e}, la rubrique « Travaux Géométriques » est une source d'exemples d'utilisation de la modélisation comme outil de résolution de problèmes. Par exemple, la représentation, la description et la construction des solides dans l'espace sont pointées comme moyen de consolider des images mentales déjà mises en place. Une approche expérimentale est indiquée pour entamer une démarche de modélisation, parce que cette approche permet de dégager progressivement les invariants de l'objet étudié. (Programmes de 5^{e} et 4^{e}, explicitation des contenus de mathématiques, colonne *Commentaires*, p. 4).

Citons un exemple de cette démarche proposée par les programmes en regardant l'introduction au chapitre 14, Espace, dans le manuel Dimathème 5^{e} (15). Sous la rubrique « Découvrir », pour la notion de « cylindre de révolution », les consignes pour les élèves sont : « *On fait tourner un rectangle autour d'un de ses côtés. Comparer le solide obtenu à certains objets de la vie courante. Ce solide est un cylindre de révolution.* » (p. 222).

Les consignes sont accompagnées d'un dessin pour illustrer le mouvement du rectangle. Notons que ces consignes ne précisent pas si l'élève doit réaliser l'action de faire tourner le rectangle ou s'il lui suffit d'imaginer cette action. En conséquence, **le domaine dans lequel l'élève doit se placer n'est pas explicite** : si l'action est effective sur de véritables objets, l'élève est placé dans le domaine de la réalité, il peut alors entamer une démarche de modélisation qui passe par la comparaison avec certains objets de la vie courante pour

(15) Dimathème 5^{e}, programme 97, Paris : éditions Didier.

dégager les invariants. Cette démarche doit aboutir à un modèle théorique de cylindre de révolution, pensé idéalement, qui place l'élève dans le domaine du traitement théorique.

Dans l'explicitation des contenus pour la classe de 4^e, la rubrique « Travaux Géométriques » présente l'idée de modélisation de façon non explicite. L'usage d'une approche expérimentale est proposé pour mettre en évidence la conservation de certaines propriétés géométriques lors d'une translation. Cet usage induit l'idée de passer d'une observation réalisée dans le domaine de la réalité, car on réalise effectivement l'expérimentation, à une explicitation des propriétés théoriques retenues : à savoir, l'explicitation du domaine d'interprétation du modèle.

> *Diverses approches expérimentales, par exemple sur des frises ou des pavages, pourront introduire la notion de translation (...) Elle pourra donner lieu à des manipulations, notamment sur des quadrillages.*
> *On pourra ainsi, après un travail expérimental conduisant à mettre en évidence la conservation des longueurs, de l'alignement, des angles et des aires, justifier certaines de ces conservations.* (p. 13).

Les objectifs des travaux géométriques pour la classe de Troisième demeurent ceux des classes antérieures. L'approche expérimentale reste une méthode pour dégager les invariants d'une classe d'objets géométriques, afin d'identifier une configuration déjà connue ou d'introduire une nouvelle configuration.

Remarquons que l'explicitation d'activités qui portent sur la manipulation d'objets concrets, comme les feuilles de papier ou de papier-calque, conduit à une **distinction entre les deux domaines dans lesquels l'élève doit se placer : le domaine de la réalité, dans lequel il manipule des objets, et le domaine théorique, dans lequel se trouvent les modèles géométriques qui sont l'objet de l'étude**.

<u>Rubrique « Organisation et gestion de données, fonctions »</u>

Le programme de la classe de 5^e propose un travail sur les différentes représentations sémiotiques d'une série statistique, de façon à ce que le choix de la représentation à utiliser soit lié à la nature de la situation étudiée. Mais il ne s'agit pas encore d'une démarche de modélisation. Le programme explicite : *« Il importe d'entraîner les élèves à lire et à représenter des données statistiques en utilisant un vocabulaire adéquat. »* (p. 10).

Le mot « *représenter* » ne signifie pas « *modéliser* ». Il est plutôt utilisé pour désigner l'ensemble de signes disponibles pour l'élève qui doit décrire une population statistique.

Le programme de la classe de 4e, par sa façon de présenter les contenus de cette rubrique, laisse une ouverture à la modélisation, mais sans l'expliciter car cette démarche ne rentre pas dans les objectifs de ce programme. Il demande, par exemple, la mise en œuvre de la proportionnalité, connaissance essentielle pour la démarche de modélisation probabiliste, au moyen de l'étude des situations de la vie courante, entre autres (p. 17). Cette ouverture est encore plus évidente dans le contenu « Statistique » : la colonne *Commentaires* précise que « *l'élève sera confronté à des situations courantes où la méthode de calcul est à remettre en cause* » (p. 18). Le programme fait référence, dans cette remarque, aux différents résultats que l'on peut obtenir lors d'un calcul de la moyenne annuelle des élèves selon la façon de prendre les données : à partir de l'ensemble des notes de l'année ou à partir de la moyenne des moyennes trimestrielles.

Dès lors, deux points importants sont à dégager pour la suite de notre recherche :

- **La mise en fonctionnement d'un premier pas vers l'introduction d'un conflit de modèles mathématiques possibles, mais non nécessairement adéquats pour la situation de la réalité qu'on veut représenter**. La décision d'utiliser tel ou tel modèle est à la charge du sujet qui réalise la modélisation. Ces modèles doivent prendre en compte les objectifs de l'expérimentation en cours, et par conséquent les objectifs de cette modélisation.
- **Les programmes pour les classes de Collège parlent de variabilité des résultats lors d'une étude quantitative d'une population. Néanmoins ils ne font aucune référence à une possible intervention du hasard, soit dans le choix d'échantillons, soit dans le déroulement de la situation observée.**

Pour conclure, dans le document d'accompagnement des programmes du cycle central, l'exploration des situations de la réalité est vivement encouragée. Ces situations servent à la fois à faciliter l'engagement des élèves dans le processus d'apprentissage (raisons d'apprendre, selon les termes de ce document), et à mettre en fonctionnement les connaissances acquises dans le domaine de la gestion de données :

> *Dans le domaine de la gestion des données, il n'y a que des avantages à travailler sur des situations authentiques, concernant par exemple l'environnement. Les données peuvent être extraites de relevés ou résulter d'activités d'enquêtes conduites par les élèves. Dans les deux cas, les aller et retour entre la mesure brute des quantités et les*

> *mesures relatives, sous forme de rapports, ont un caractère hautement formateur.* (Accompagnement des programmes du cycle central, Mathématiques, p. 12).

§1.2.2. Le programme de Statistique pour la classe de Seconde, rentrée 2000

Regardons d'abord les objectifs du nouveau programme pour la classe de Seconde pour le chapitre « Statistique ».

> *En seconde le travail sera centré sur :*
> *– la réflexion conduisant au choix de résumés numériques d'une série statistique quantitative ;*
> *– la notion de fluctuation d'échantillonnage, vue ici sous l'aspect élémentaire de la variabilité de la distribution des fréquences ;*
> *– la simulation à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice. La simulation remplaçant l'expérimentation permet, avec une grande économie de moyens, d'observer des résultats associés à la réalisation d'un très grand nombre d'expériences. On verra ici la diversité des situations simulables à partir d'une liste de chiffres.*
> *L'enseignant traitera des données en nombre suffisant pour que cela justifie une étude statistique ; il proposera des sujets d'étude et des simulations en fonction de l'intérêt des élèves, de l'actualité et de ses goûts.*

Notons, dans cet extrait, la place de la simulation informatique dans le programme pour la classe de Seconde. Explicitons alors son statut par rapport à notre recherche. L'environnement informatique (calculatrice ou ordinateur) permet de reproduire une expérimentation facilement, un grand nombre de fois et dans des conditions d'indépendance. Mais dans la situation où les paramètres de cette expérience ne sont pas donnés ou ne sont pas accessibles, n'étant pas connus, la simulation évoquée ne peut être que de principe. Puisqu'ils ne sont pas connus, ils ne sont pas injectés dans le fonctionnement de l'artefact informatique. Dans ce cas, **nous ne parlerons pas de simulation de l'expérience car il n'y a pas de modèle inséré dans cet environnement : il s'agit de la *production d'une représentation seulement évocatrice de l'expérience à l'écran.*** En réalité, nous sommes en train de réaliser une expérience aléatoire intrinsèque, en la reproduisant un grand nombre de fois grâce à la performance de l'artefact informatique choisi.

Donnons un exemple. Avec une calculatrice, nous pouvons utiliser la touche « rand » pour obtenir des valeurs entières entre 1 et 6. Supposant que nous n'avons pas accès aux formules installées pour la fabrication des nombres pseudo-aléatoires qui seront affichés à l'écran lors de l'utilisation de cette touche, nous considérons cette manipulation de la calculatrice comme une expérience aléatoire en soi. Nous ne cherchons pas nécessairement à la concevoir comme la simulation d'un jeu de dés.

Pour utiliser de la calculatrice comme outil de simulation de ce jeu, il faudrait :

- concevoir le jeu avec le dé comme une expérimentation réelle ;
- ensuite, construire des hypothèses de modèle sur l'équiprobabilité des faces possibles, déjà dans un processus d'abstraction ;
- s'engager dans le processus de construction d'un modèle théorique pour ce jeu, modèle qui sera injecté dans le mode d'emploi de la touche « rand » pour aboutir aux six chiffres équirépartis.

Dans cet usage de l'environnement informatique, les élèves auront un contact avec la fluctuation d'échantillonnage par la répétition effective de l'expérience aléatoire elle-même, en nombre suffisant pour déclencher une réflexion à propos de cette variabilité. **La prise en compte du hasard est alors incontournable : il est présent lors de l'utilisation d'un générateur aléatoire ou pseudo-aléatoire, comme la touche « rand » de la calculatrice ou la fonction « random » d'un logiciel. Comment expliquer leur fonctionnement ?**

Même si la notion de fluctuation d'échantillonnage ne doit pas être un objet d'enseignement, la reproduction de l'expérience un grand nombre de fois est un outil pour la compréhension de celle-ci. Cette compréhension est possible par la mise en évidence de la variabilité des résultats possibles due à l'intervention *du hasard*, ou plutôt de sa simulation par la génération de nombres pseudo-aléatoires.

Remarquons qu'il ne s'agit pas de modifier l'action effective réalisée sur l'ordinateur ou sur la calculatrice : on change le point de vue lorsqu'on change l'enjeu de cette action par le changement de son interprétation. On passe d'une simulation pour laquelle le modèle théorique de l'expérimentation est déjà prêt, à la reproduction d'une expérimentation dont l'objectif est de déclencher une démarche de modélisation par l'observation de ses invariants. **Il n'existe pas de véritable simulation sans un processus de modélisation préalable.**

Le changement de point de vue exposé ci-dessus, qui préconise d'expliciter la distinction entre simulation et production d'une expérience informatique, est conforme aux objectifs du programme : faire comprendre à chaque élève la signification de l'action de simuler une expérience de la réalité. Citons un extrait du document d'accompagnement du programme [16] qui explique bien le statut de la simulation :

> *Formellement, simuler une expérience, c'est choisir un modèle pour cette expérience – ici une loi de probabilité P sur un certain ensemble – puis produire une liste de données pour lesquelles P est un modèle pertinent : cet aspect sera introduit ultérieurement en section S. Dans un premier temps, en classe de seconde, le programme se restreint à une approche naïve, intuitive et ludique : cela permet de se familiariser avec l'aléatoire, de prendre son temps pour expérimenter et de préparer ainsi l'axiomatisation nécessaire pour clarifier certains raisonnements et les transformer en démonstrations.* (p. 9).

§1.3. La modélisation des situations aléatoires

Revenons à l'extrait ci-dessus. Nous en dégageons un des objectifs du chapitre «Statistique » pour la classe de seconde : permettre une familiarisation avec l'aléatoire par une approche expérimentale. Notamment, l'usage d'un environnement informatique est envisagé afin de permettre la répétition d'expériences concrètes un très grand nombre de fois.

L'aspect intuitif et ludique est mis en évidence à plusieurs reprises dans les textes officiels : l'élève doit prendre son temps pour effectuer lui-même des expériences, et les résultats seront à comparer avec ceux qui sont obtenus par d'autres élèves ou fournis par l'enseignant. Il est souhaitable aussi que l'élève fasse l'observation et la synthèse de ses propres expérimentations. Citons à ce propos un extrait du document d'accompagnement du programme de seconde, version janvier 2000 :

> *L'esprit statistique naît lorsqu'on prend conscience de la fluctuation d'échantillonnage ; pour cela il convient non seulement d'observer avec les yeux, mais aussi d'avoir les mots permettant de décrire ce qu'on observe. Dans le cadre des expériences de référence de la seconde (jeux de dés, pile ou face, de tirages de boules dans des urnes), la distribution des fréquences va être le moyen de parler de la fluctuation d'échantillonnage : on observera que cette distribution de fréquences varie (...)* (p. 7).

---

[16] Programme de Seconde publié dans le B. O. hors-série, n°6, du 12 août 1999

Dans cet extrait, la première phrase laisse incomplète la référence à l'esprit statistique, supposé naître avec la prise de conscience de la fluctuation d'échantillonnage. Il naît aussi avec la prise de conscience que l'étude d'une population statistique, d'un point de vue qualitatif ou quantitatif, conduit à s'intéresser à une ou plusieurs de ses caractéristiques.

Sans insister sur ce point à propos de l'esprit statistique, cet extrait nous intéresse plutôt par la démarche de modélisation que nous pouvons en dégager : partir de l'observation et de la description d'une situation de la réalité (*observer avec les yeux* et *décrire ce qu'on observe*, selon les termes employés) pour la représenter au moyen d'un modèle. Il y a, en conséquence, un changement de domaines et le rôle de la description de la réalité qui a été observée est bien défini dans l'extrait suivant :

> *Cette description est déjà une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié.* (Henry, 1997a, p. 80).

Cette démarche nous ramène à la définition de modèle retenue dans notre premier chapitre : une représentation théorisée, simplificatrice d'une réalité empirique locale. **Il est donc nécessaire pour l'élève de distinguer entre une observation faite dans le domaine de la réalité et sa représentation, qui appartient au domaine théorique.**

§1.3.1. La non-explicitation du changement de domaines

Pour reprendre les objectifs du programme de Seconde, le travail sera centré sur la simulation d'expériences de référence, comme les jeux de dé, de pile ou face, ou un tirage *au hasard* de boules dans une urne, en partant d'une mise en œuvre effective de quelques expérimentations par les élèves. Cette simulation servira à produire un grand nombre de résultats quantitatifs qui doivent conduire à la notion de fluctuation d'échantillonnage. Encore selon les programmes, une simulation repose sur un choix de modèle. Nous soulignons que ce choix est fondé sur des hypothèses que les textes officiels laissent implicites : la délimitation de la classe de situations aléatoires sur lesquelles portera l'enseignement. Cette délimitation correspond à celle que nous avons explicitée dans le Chapitre I de ce travail : « **les situations aléatoires reproductibles qui peuvent s'interpréter par un prélèvement "au hasard" dans une population en utilisant, pour ce but, la manipulation d'objets générateurs de hasard.** » (cf. schéma 1, §1.4 du Chapitre I).

Ainsi, nous pouvons dégager effectivement un passage du domaine de la réalité vers le domaine théorique, passage qui n'est pas toujours explicité, même par le contrat didactique habituel :

> *(...) on ne dit pas en général aux élèves que l'on est dans un modèle quand on utilise les mathématiques pour trouver la solution à un problème concret. Il est pourtant important de savoir que l'on n'est plus dans la réalité, mais dans une construction abstraite qui repose sur des hypothèses (le "on suppose" de Bertrand [17]).* (Girard et Parzysz, 1998, p. 576).

Pour conclure cette contextualisation de la modélisation par rapport à l'enseignement, nous revenons à la notion de modélisation. **Qu'est-ce que l'action de modéliser ?** Pour nous, modéliser une situation de la réalité signifie qu'on doit sortir de cette réalité pour la représenter par des objets théoriques. Nous posons la question : est-ce que l'enseignement prend en charge ce changement ? **Dans cette recherche, nous proposons d'étudier les conditions didactiques dans lesquelles les élèves peuvent effectuer le passage du domaine de la réalité au domaine théorique d'une manière explicite, en donnant du sens aux représentations qu'ils obtiennent comme résultat de ce travail de modélisation.**

§2. Un domaine intermédiaire : le pseudo-concret

§2.1. La nécessité didactique du domaine pseudo-concret

Reprenons le processus de modélisation tel que nous venons de le décrire dans la conclusion du paragraphe précédent, et mettons en évidence les conditions du passage du domaine de la réalité au domaine théorique. Lors de ce passage, il existe un moment où l'élève est déjà sorti du domaine de la réalité, car il travaille déjà sur des abstractions de la situation qu'il veut modéliser. À ce moment, l'élève n'a pas encore abouti à une explicitation de cette abstraction en utilisant des objets théorisés. Il n'a pas encore atteint le niveau du domaine théorique parce qu'il n'a pas encore les outils mathématiques symboliques, ni les capacités d'abstraction pour effectuer un travail efficace dans ce domaine. **Nous nous proposons alors d'étudier, de façon assez précise, cette transition entre le domaine de la réalité et le domaine théorique : le domaine pseudo-concret. Nous désignerons par ces termes le *domaine dans***

---

[17] Les auteurs font référence à un dialogue entre un enseignant et son élève Bertrand : « *un problème, ce n'est pas la réalité, on suppose !* » (dans le même article, p. 575).

lequel on utilise les noms des objets de la réalité pour désigner des objets abstraits, idéalisés, théoriques.

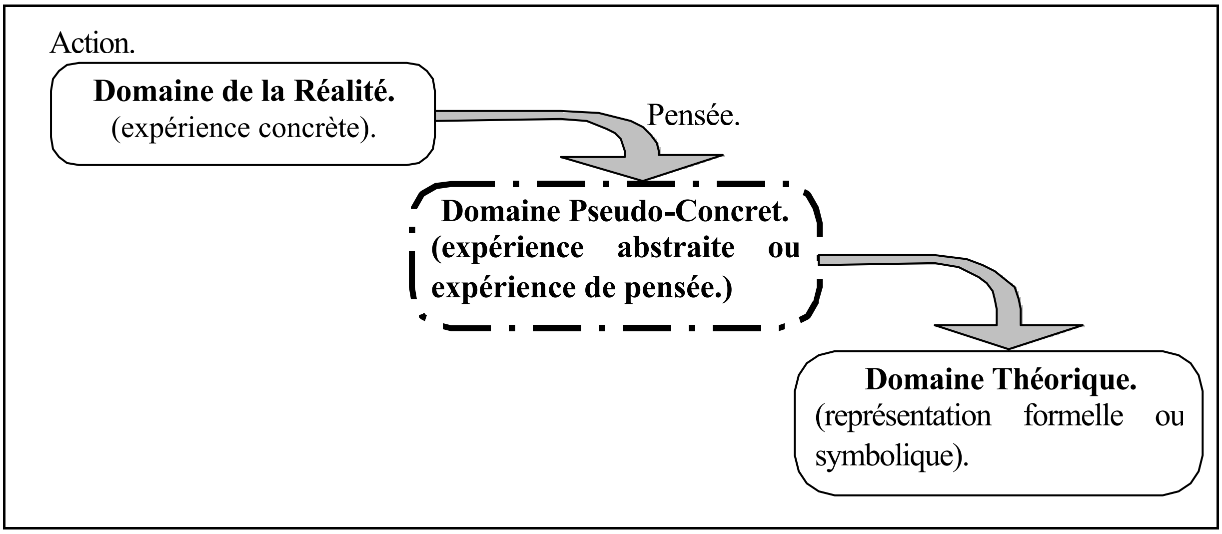


Schéma 4

Pour explorer ce processus de modélisation, nous avons choisi une démarche expérimentale par laquelle nous limitons le travail théorique, à la charge des élèves, au passage au niveau du domaine pseudo-concret. Cette démarche commence par l'observation et la description de la réalité : une description guidée par un regard filtré par une connaissance théorique, dont une des conséquences est l'interprétation des propriétés perceptives de la situation en une description locale de cette réalité en termes idéaux. L'élève se situe encore dans le domaine de la réalité, mais il est en train de circonscrire un sous-domaine auquel appartient cet ensemble de caractéristiques et de propriétés locales : le domaine de fonctionnement, qui sera attaché au modèle en cours de construction [18]. C'est un premier pas vers l'abstraction.

§2.2. Les objets qui composent ce nouveau domaine

Revenons à la démarche de modélisation en proposant une comparaison avec la Géométrie. On peut constater l'existence d'une étape dans ce processus : l'élève ne s'y situe plus dans le domaine de la réalité, quand il ne manipule plus que des objets de pensée, idéalisés. Soulignons que cette pratique est habituelle dans les cours de mathématiques, lorsque l'élève doit représenter des abstractions d'objets du domaine de la réalité vers des objets du domaine théorique. Par exemple, lorsque l'élève doit abstraire un dessin à main levée sur une feuille de papier vers la figure géométrique signifié par ce dessin. Dans le cas des situations aléatoires,

---

[18] Voir le schéma 2, §3.1, Chapitre I.

l'élève doit faire l'abstraction de l'expérience concrète (jet de dés réels, par exemple) pour la représenter par un modèle probabiliste adéquat : jet fictif de dés parfaits.

Soulignons aussi la contrainte didactique qui résulte du fait que les élèves n'ont pas encore les connaissances théoriques nécessaires pour compléter cette démarche. L'élève travaille alors avec des expériences de pensée, mais en gardant les désignations des objets concrets qui composaient le domaine de la réalité. Remarquons qu'à ce niveau, le processus d'abstraction implique que la reconstruction théorique d'un objet passe par une diminution de sa complexité caractéristique au prix d'une réduction, en ne retenant que les relations pertinentes pour sa modélisation (Laborde, 1994a). Reprenons l'exemple d'un jet de dés.

On lance un dé pour observer la face supérieure après son immobilisation. L'élève peut avoir un «dé réel » pour manipuler. Il fait ainsi des expériences dans le domaine de la réalité. Lors de l'observation et de la description de cette expérimentation, certaines caractéristiques sont à retenir pour l'abstraction (comme la forme du dé, la face supérieure après immobilisation du dé : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, etc.). Au moment où l'élève décrit cette expérience pour la modéliser, il ne retient pas les imperfections du dé réel ni les conditions de son lancer :

- il retient le terme « dé » pour désigner l'image mentale d'un objet parfait qui représente cet objet.
- du même, il retient les désignations des faces du dé réel pour nommer les faces du dé abstrait.

Cette expérience de pensée et les objets abstraits utilisés pour la décrire appartiennent ainsi au domaine pseudo-concret. Nous appellerons ces représentations abstraites des ***« modèles pseudo-concrets »***. Leur fonction didactique est d'induire implicitement le modèle théorique en jeu, même si dans sa formulation il n'est pas accessible aux élèves au niveau du Collège.

> *On peut présenter un modèle par une analogie, en y introduisant des objets idéalisés de la réalité. Cela veut dire que dans un vocabulaire courant, les objets du modèle sont doués de propriétés caractéristiques bien définies. Nous parlerons alors de* ***modèles pseudo-concrets****.* (Henry, 1997a, p. 79).

Revenons à la comparaison avec la Géométrie : si nous faisons un dessin de deux droites perpendiculaires, qu'il soit sur papier ou à l'écran, nous réalisons une expérimentation dans le domaine de la réalité. Lors de la première abstraction, la figure formée par deux droites perpendiculaires évoque les propriétés géométriques d'une perpendicularité « *parfaite* ». Elle a un statut de modèle pseudo-concret qui représente toutes les paires de droites perpendiculaires que l'on pourrait dessiner, mais sans encore atteindre les abstractions et les désignations propres au modèle théorique de la perpendicularité. Ce modèle théorique pourrait être formulé, par exemple, en termes de produit scalaire.

> *(…) la figure serait le fruit d'un processus d'abstraction qu'un sujet effectue quand, à partir du dessin (signifiant), il imagine l'objet (référent) représenté.* ***La figure (signifié) serait ainsi une reconstruction mentale d'un dessin géométrique, abstrait de son support matériel, ayant pour fonction de représenter idéalement l'objet géométrique référent*** *(…) La figure prend le statut de modèle d'une configuration concrète, que suivant Henry (1996) nous désignerons par les termes de "modèle pseudo-concret".* (Jahn, 1998, p. 85, souligné pour nous).

Cette notion de figure comme modèle pseudo-concret, mise en évidence par l'extrait ci-dessus, nous permet de revenir sur la définition que nous voulons retenir pour les éléments de ce nouveau domaine :

Un modèle pseudo-concret est une représentation mentale d'un élément du domaine de la réalité construite au moyen de son idéalisation, en mettant en évidence ses caractéristiques pertinentes dans un processus de modélisation correspondant au cadre étudié. La construction de cette représentation mentale débute par une abstraction guidée par un regard théorique [(19)], dont une des conséquences est l'abandon des propriétés perceptives non signifiantes de la situation.

[(19)] Nous utilisons l'expression "regard théorique" pour une appréhension guidée par une connaissance de nature théorique du sujet.

§3. La notion d'expérience aléatoire

§3.1. Le passage de l'expérimentation à sa représentation pseudo-concrète : l'expérience aléatoire

Dans le processus d'apprentissage de la modélisation de situations aléatoires, la prise de conscience du passage du domaine de la réalité au domaine pseudo-concret est très importante. Elle est à la base du processus d'abstraction et de théorisation de l'aspect de la réalité qu'on veut représenter par un modèle pseudo-concret. Dans ce processus, le premier élément du domaine pseudo-concret avec lequel l'élève va prendre contact est la notion ***d'expérience aléatoire*** : ***la forme abstraite de l'expérimentation qui est en cours dans le domaine de la réalité.***

Prenons l'exemple où l'expérimentation consiste à lancer deux dés (objets physiques), d'un certain matériel (terre cuite, plastique ou d'autres), d'une forme cubique (contenant, chacun, 6 faces à peu près carrées) pour observer la somme des valeurs indiquées par la face supérieure de chacun des dés après leur immobilisation. Après quelques observations de la démarche à suivre pour jouer à ce jeu, un sujet doit être capable de faire une **description assez précise et opératoire** pour permettre à quelqu'un d'autre de jouer le même jeu. La **perception du hasard** est faite par la prise de conscience de la variabilité des résultats possibles et de la non-possibilité de connaître la position finale de chacun des dés avant leur immobilisation. Par conséquent, on ne peut pas connaître d'avance la valeur de la somme des points que l'on peut obtenir par l'expérimentation, même **s'il est possible d'établir l'ensemble de ces valeurs** : $\{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$. La mise en fonctionnement de cette expérimentation un très grand nombre de fois doit conduire à une constatation des régularités des fréquences : les faces de chacun des deux dés se présentent à peu près avec la même fréquence, ce qui n'est pas le cas pour les sommes des points. Par exemple, la valeur « 12 » et la valeur « 2 » se présentent à peu près avec la même fréquence, mais cette fréquence est plus petite que celle de la valeur « 6 » ou de la valeur « 8 », qui s'obtiennent à peu près avec la même fréquence. Nous avons alors une validation pragmatique de l'opérationnalité de la description faite par une appréhension perceptive des fréquences obtenues lors de la reproduction du jeu un très grand nombre de fois : la validation de la description par la mise en œuvre de l'expérimentation et par la constatation de la cohérence des résultats obtenus.

Il n'y a pas encore de processus d'abstraction, mais l'objectif de modéliser le jeu met en fonctionnement une observation guidée par un regard théorique. **Cette étape de la**

modélisation opère dans le domaine de la réalité. Mais après cette phase de description opératoire de l'expérience, le processus d'abstraction du jeu est entamé. Autrement dit, on passe de la manipulation concrète des dés réels à une représentation mentale de ce jeu. Nous avons alors une expérience de pensée construite à partir de l'abandon de certains éléments non-pertinents pour la modélisation et de la délimitation du domaine de fonctionnement par l'explicitation des caractéristiques que l'on veut retenir.

Par exemple, la matière dans laquelle est fait le dé disparaît lors de cette abstraction : on ne retient que la forme d'un cube parfait, que l'on continue à désigner par le terme de « dé ». L'intervention du hasard est interprétée par l'hypothèse implicite d'équiprobabilité des faces pour chacun des dés**. Nous sommes alors dans le domaine pseudo-concret. Dans ce domaine, cette expérimentation est conçue comme la réalisation d'une *expérience aléatoire*.**

Nous nous posons alors les questions : qu'est-ce qu'une description opératoire d'une expérience permettant de la caractériser comme une expérience aléatoire ?

§3.2. Protocole Expérimental

Revenons à la notion de *description opératoire* que nous sommes en train d'utiliser : une description précise et suffisante pour permettre la reproduction de l'expérience en jeu dans les mêmes conditions. Elle doit donc permettre une validation pragmatique de cette reproduction. Rappelons ici le sens que nous donnons à l'expression ***situation potentiellement reproductible*** : « *ce sont des situations de la réalité que nous pouvons considérer comme reproductibles au moins par la pensée, car elles relèvent d'une description assez précise des conditions dans lesquelles elles peuvent être reproduites*. » (cf. §1.4 du Chapitre I).

Cette description opératoire d'une expérience aléatoire, prenant la forme d'une liste de consignes précises et suffisantes, est appelée ***protocole expérimental***. Nous pouvons emprunter aux physiciens ce concept, outil didactique essentiel. Pour nous, **une expérience aléatoire est reproductible s'il existe une liste de consignes qui permet de la réaliser et de s'accorder sur le fait que l'expérience ainsi décrite a bien été reproduite**.

En revenant à l'exemple du lancer de deux dés, cela veut dire que le protocole expérimental doit préciser les « règles du jeu ». Par exemple :

- Comment lancer les deux dés ?
- Ces dés sont-ils distinguables ou bien identiques ?

- Selon quelles conditions considère-t-on un résultat valide ? Faut-il que les deux dés s'immobilisent sur la table où ils ont été lancés ; un seul, ou même les deux peuvent-ils tomber au sol ?

Cette façon de décrire une expérience sous la forme d'une liste de consignes fait partie des programmes actuels de Physique-Chimie en Cycle Central du Collège. Nous trouvons, dans les "Compétences Transversales", une première référence :

> *A l'issue du cycle central des collèges, l'élève doit également être capable de :*
> *(...)*
> *- faire le schéma d'une expérience réalisée ;*
> *- réaliser une expérience décrite par un schéma ;*
> *(...)*
> *- un problème scientifique très simple étant formulé, expliquer en quoi un protocole expérimental proposé par le professeur permet de répondre à la question.*

La colonne "Compétences", dans la description des contenus à développer, présente aussi une proposition explicite d'utilisation de protocoles expérimentaux : « *Proposer et mettre en œuvre un protocole permettant de tester la miscibilité ou la non-miscibilité de deux liquides.* »

Cette proposition des programmes se retrouve dans les manuels sous la forme de listes de consignes pour réaliser des expériences, même quand l'expression *protocole expérimental* n'est pas utilisée. Citons à titre d'exemple la Collection Armand Colin, Physique-Chimie, diffusion Bordas, 1998. Nous trouvons à la fin des manuels une partie appelée "Techniques Expérimentales". Cette partie est composée par des fiches qui donnent des protocoles expérimentaux pour la réalisation de quelques expériences. Ces protocoles sont en partie des consignes écrites en langue naturelle, en partie des figures (des dessins ou des photos) qui complètent l'explication de l'action visée. Nous trouvons aussi dans chaque chapitre une partie expérimentale, selon le programme, appelée "Activité expérimentale", composée de trois parties :

A. « Préparons l'expérience », qui contient une description du dispositif expérimental de façon à ce que les élèves puissent le construire ;
B. « Déclenchons l'expérience », qui contient le protocole expérimental ;
C. « Décrivons nos observations », partie qui contient la description des résultats de l'expérimentation.

Prenons par exemple l'activité proposée à la page 88 de ce manuel Bordas pour la classe de 4e. Le protocole expérimental proposé contient une partie en langue naturelle et un dessin dont l'objectif est de faciliter la compréhension des consignes données :

-Allumons successivement : la lampe S seule, la lampe S' seule, puis simultanément S et S'.

-Repérons les limites P, Q, R, T des zones distinguées sur l'écran.

- Plaçons aussi notre œil derrière les différents trous de l'écran.

De cette façon, nous pouvons considérer que l'élève est en contact avec la notion d'expérience décrite par une liste de consignes depuis le Cycle Central du Collège, même si cette expérience n'est pas aléatoire. En effet, la différence entre les deux types d'expériences, du point de vue de l'élève, se trouve plutôt du côté des résultats : le déterminisme et l'aléatoire jouent un rôle fondamental dans l'analyse. Si dans une expérience déterministe on peut dire d'avance ce qui doit être obtenu comme résultat, une expérience aléatoire se caractérise, entre autres, exactement par l'impossibilité de cette anticipation du résultat qui sera observé à la fin du processus. Cette impossibilité existe même si nous pouvons donner l'ensemble des issues possibles et même si le déroulement de l'expérience aléatoire est scrupuleusement reproduit.

Ainsi, après ces remarques sur le contact des élèves au niveau du Collège avec l'usage d'un protocole expérimental en Sciences Physiques, revenons sur la définition que nous avons donnée au début de ce sous-paragraphe : **un *protocole expérimental* doit être la description de l'expérience aléatoire de façon opératoire**. Il doit donc contenir l'objet de l'observation, les conditions dans lesquelles on fait l'expérimentation et les critères pour le classement des résultats observés. Ces critères de classement sont à déterminer par l'expérimentateur, selon les objectifs de l'expérimentation. Prenons un exemple. Si l'expérience consiste en un lancer de dé sur une table, il y a plusieurs résultats produits par l'action de l'expérimentateur : le nombre de fois où le dé tourne sur la table, la position de ce dé sur la table, la face supérieure qui se présente après immobilisation, etc. Ces choix déterminent, en conséquence, les critères pour le classement des résultats de l'expérimentation effectuée pour dégager les différentes issues possibles qui caractérisent l'expérience aléatoire décrite.

Donnons un deuxième exemple. On veut observer une file d'attente devant un guichet. Le résultat qui nous intéresse est le nombre de personnes qui attendent dans un intervalle de temps donné. Dans ce cas, les caractéristiques physiques ou personnelles des personnes (sexe, âge, couleur de la chemise, etc.) ne nous intéressent pas. Le protocole expérimental doit donc contenir un critère de classement qui prend en compte seulement le nombre de personnes en attente par tranches de temps. Dans une expérience plus élaborée, d'autres critères pourront intervenir (âge, sexe, etc.).

§3.3. Caractérisation d'une expérience aléatoire

L'observation et l'analyse d'une série d'expériences reproductibles au moyen d'un même protocole expérimental permettant de dégager les invariants pour leur modélisation, conduisent à idéaliser ces expériences et à aboutir à leur description dans le domaine pseudo-concret : l'***expérience aléatoire.***

Nous soulignons ici ce passage du domaine de la réalité au domaine pseudo-concret, de l'expérience réelle à l'expérience idéalisée. La notion d'expérience aléatoire met ainsi en évidence ce changement de domaine. [20]

Nous proposons de rendre cette notion opératoire par la définition de quelques critères qui la caractérisent. Notre objectif est de donner aux élèves des outils « théoriques », pour qu'ils puissent caractériser une expérience qui se réalise dans le domaine de la réalité (l'expérimentation qu'ils observent) et qui peut être représentée par une expérience aléatoire, dans le domaine pseudo-concret.

Donnons un exemple :

Domaine de la réalité.	**Domaine pseudo-concret.**
Expérimentation : lancer un dé (objet physique) en terre cuite, de forme à peu près cubique, observer son comportement et le résultat obtenu. **Procédé** : action physique de mise en fonctionnement d'une expérience réelle, passible d'observation et de description et, en conséquence, avec intentionnalité de l'expérimentateur.	**Expérience aléatoire** : imaginer le lancer d'un dé idéal (représentation mentale) et ne retenir de l'observation que sa face supérieure après immobilisation. **Procédé :** expérience mentale construite à partir de la simplification et de l'abstraction de l'expérience réalisée ou planifiée.

Quelles sont les conditions qui permettent ce passage cognitif de façon opératoire ?

Schéma 5

[20] Notons ici que dans la théorie probabiliste, « expérience aléatoire » a le statut d'un terme primitif que les mathématiciens peuvent interpréter dans son sens naï f. À des fins didactiques, nous lui avons conféré un statut de modèle pseudo-concret, et donc l'expérience aléatoire est présentée de façon contextualisée, sans aucune formalisation, contrairement à un modèle mathématique formel.

Nous constatons une évolution dans la recherche d'une explicitation de ces conditions par l'étude d'une série de travaux de recherche sur l'enseignement des probabilités, conduits sur une longue période. Rappelons quelques-unes de ces définitions afin de retenir celles qui seront utilisées dans la suite de ce travail.

Prenons d'abord les présentations dues à H. Steinbring (1991) pour mettre en évidence l'importance de la perception du type de situation de la réalité en jeu : situation aléatoire (reproductible) ou situation contingente (non-reproductible), d'après notre schéma présenté au paragraphe §1 du Chapitre I.

> *– Ce sont des expériences avec plusieurs résultats dont les sorties ne peuvent pas être prévues.*
>
> *– Ce sont des expériences dont les résultats dépendent du hasard.* (Steinbring, 1991, p. 141).

Remarquons que ces caractéristiques ne sont pas suffisantes pour garantir une distinction entre les deux types de situations de la réalité invoquée ci-dessus. Nous revenons alors sur la définition donnée par Henry (1994). Dans cette définition l'auteur explicite le besoin d'identifier l'intervention du hasard dans un **processus expérimental reproductible**, que nous avons retenu lors de notre étude épistémologique sur l'appréhension du hasard, au Chapitre I.

Dans la même publication, Henry indique trois caractéristiques à utiliser par les élèves en classe de première afin de reconnaître une expérience aléatoire :

> *i – Une expérience aléatoire doit conduire à un* ***ensemble d'issues possibles****, bien identifiées.*
>
> *ii – Ces résultats ne sont pas prévisibles de manière absolue, ils dépendent du* ***hasard*** *;*
>
> *iii – De plus, l'expérience doit être* ***reproductible*** *dans les mêmes conditions (au moins par la pensée).* (Henry, 1994, p. 53).

Notons que l'auteur met en évidence les trois mot-clés pour l'établissement des critères : ensemble d'issues possibles, hasard et reproductible, mais sans expliciter le domaine dans lequel l'élève devra se placer : réalité ou pseudo-concret. En effet, **pour l'élève, la reconnaissance de la reproductibilité n'est pas toujours transparente, parce qu'il peut hésiter à reconnaître la même expérimentation, et non une reproduction de cette expérimentation dans les mêmes conditions de réalisation.** C'est une conséquence du rapport entre hasard et contingence que nous avons mis en évidence. Ce rapport peut être travaillé didactiquement par l'explicitation du point de vue selon lequel on réalise l'observation de la situation aléatoire : le point de vue statistique (hasard) ou selon l'unicité du fait observé (contingence). Cette explicitation est mise en fonctionnement au moyen de l'expérimentation, selon les conclusions dégagées dans le Chapitre I. (En particulier, dans notre schéma 1 présenté au paragraphe §1.4).

L'adéquation de la description d'une expérience aléatoire due à la confusion entre réalité et modèle a été mise en évidence dans Henry (1997b). L'auteur précise alors cette caractérisation en se plaçant dans le domaine de la réalité, mais en gardant l'expression « expérience aléatoire » pour désigner conjointement ce que nous appelons « expérience réelle » et « expérience de la pensée ».

> *La notion d'"expérience aléatoire" est dégagée pour désigner un processus réel de nature expérimentale, où le hasard intervient, avec des issues possibles bien identifiées (...) Une expérience aléatoire, c'est la mise en place par un expérimentateur d'un tel système évolutif, quand l'expérimentateur s'intéresse aux issues (observables) qui vont se présenter à la fin du processus.* (Henry, 1997b, pp. 86-87).

Cela nous amène tout naturellement à indiquer les critères retenus pour caractériser une expérience aléatoire, que nous utiliserons pour élaborer une didactique de l'aléatoire. Ainsi, afin de bien mettre en évidence le changement de domaines et le rôle de la notion d'expérience aléatoire pour la réalisation de ce changement, nous adopterons dans notre travail la définition suivante :

Une *expérience aléatoire* est le représentant pseudo-concret d'une expérience qui doit pouvoir être décrite par l'explicitation des trois caractéristiques fondamentales :

- ✓ **On peut donner un protocole expérimental pour permettre la reproduction de cette expérience.**
- ✓ **L'expérience est aléatoire. C'est-à-dire que le hasard intervient dans son déroulement de telle sorte que nous ne pouvons ni déterminer ni calculer a priori, avec les connaissances disponibles, le résultat se présentant lors d'une expérimentation (imprévisibilité des résultats).**
- ✓ **Le protocole expérimental détermine clairement une liste des issues possibles que l'on décide de repérer pour cette expérience aléatoire.**

Lorsqu'on parle d'intervention du hasard parmi les critères ci-dessus, il faut préciser ainsi ce que nous voulons dire : « *nous ne pouvons ni déterminer ni calculer a priori, avec les connaissances disponibles, le résultat se présentant lors d'une expérimentation* ». Si nous parlons de connaissances disponibles, il ne s'agit pas de celles qui sont propres du sujet qui réalise ou qui observe l'expérimentation. Nous parlons ici de la connaissance admise par la communauté scientifique, encore qu'une telle affirmation introduit la nécessité d'un type de contrôle par le sujet dans les conditions de réalisation d'une expérience aléatoire (Serrano, 1996). Cet élément de subjectivité est en réalité de nature didactique : il implique la reconnaissance expérimentale par l'élève de l'intervention du hasard et de l'imprévisibilité des issues possibles.

L'auteur utilise les mêmes critères, que nous venons de retenir et de mettre en évidence ci-dessus, pour caractériser ce qu'on appelle couramment un « *phénomène aléatoire* » pour faire référence à ce que nous nommons « *expérience aléatoire réelle* » ou plus simplement « *expérience* ». La mise en fonctionnement d'une expérience réelle sera désignée par « *expérimentation* ». Serrano porte son attention essentiellement sur la suite des résultats et non sur l'expérience aléatoire réelle. Il est ainsi amené a rajouter encore plus de subjectivité lorsqu'il propose deux critères supplémentaires pour caractériser ces phénomènes, ce qui distingue son approche de celle que nous sommes en train d'utiliser :

> *– Les suites de résultats qui sont obtenues par la répétition de l'expérience ne présentent pas un modèle passible de contrôle par le sujet qui réalise cette expérience.*
>
> *– Dans cet apparent désordre, il y a plusieurs régularités globales, parmi lesquelles la première est la stabilisation des fréquences de chacune des issues possibles. Grâce à cette régularité globale on peut étudier ces phénomènes aléatoires au moyen du calcul des probabilités.* (Serrano, 1996, p. 30).

Ces deux critères sont fondés sur l'idée de la réalisation de l'expérimentation un très grand nombre de fois. Nous ne les reprenons pas comme des caractéristiques de base susceptibles de définir une expérience aléatoire, mais plutôt comme des **éléments de validation pragmatique de la reproductibilité de l'expérimentation qui génère l'expérience aléatoire**.

Prenons l'exemple d'un jeu de pile ou face. Les élèves ne peuvent pas contrôler chaque coup du jeu pour savoir s'ils l'ont bien lancé, la régularité de la superficie sur laquelle ils ont lancé la pièce, etc. Ce sont des caractéristiques physiques non pertinentes qui vont disparaître lors de l'installation du processus de modélisation. On réalise alors cinquante fois cette expérience. Si, au bout de ces lancers, il n'y a que des piles, les élèves peuvent avoir alors un contrôle pragmatique : ils peuvent décider que cette pièce peut être truquée ou que les données sont sujettes à caution. Dans le même exemple, s'il y a un certain équilibre entre le nombre de piles et de faces, les élèves peuvent invoquer la symétrie de la pièce, même s'ils n'ont pas obtenu exactement vingt-cinq fois chaque résultat.

Cette régularité macroscopique met en évidence la variabilité relative du hasard dont la loi des grands nombres rend compte. Autrement dit, la régularité macroscopique des résultats constitue une rétroaction qui permet la validation pragmatique du modèle d'expérience aléatoire choisi à cette étape du processus de modélisation : accepter ou réfuter le modèle par l'expérimentation.

§4. L'urne de Bernoulli

§4.1. Le processus d'abstraction dans une situation de Bernoulli

L'utilisation de la notion d'*expérience aléatoire* comme lien nécessaire entre la perception du hasard dans une situation aléatoire de la réalité et le concept de probabilité nous conduit à la proposition d'une démarche de modélisation, qui sera explicitée dans la suite de ce paragraphe. Cette démarche, qui commence nécessairement par des activités d'observation et de description (Henry, 1997a, p. 80), passe par l'explicitation de l'expérience aléatoire en jeu. Après ces activités d'observation et de description, nous demandons aux élèves de rédiger un protocole expérimental pour la reproduction de l'expérience, ainsi que de donner l'ensemble des issues qui seront considérées comme aboutissements possibles. Le schéma ci-après illustre cette démarche.

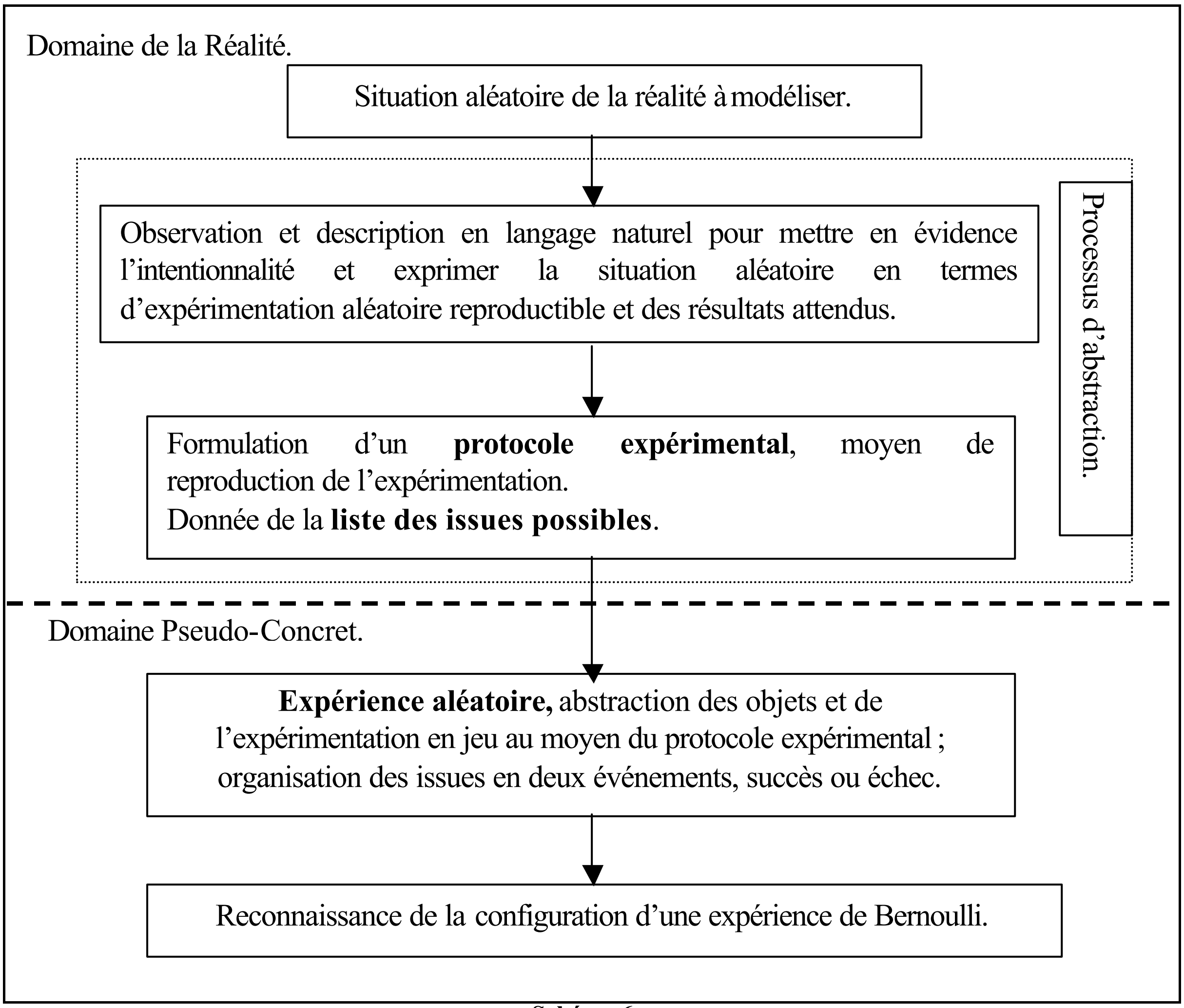


Schéma 6

Cette démarche commence par l'observation de la situation aléatoire dans la réalité, puis passe par un processus d'abstraction pour dégager l'expérience aléatoire, présentée dans le domaine pseudo-concret. Elle conduit les élèves à reconnaître la ***configuration d'une expérience de Bernoulli : une expérience aléatoire qui résume les issues possibles par deux évènements, « succès » ou « échec ».*** Ainsi, à chaque répétition d'une expérience de Bernoulli on doit avoir les mêmes conditions initiales pour que l'on puisse la modéliser par une urne de Bernoulli (tirage avec remise).

Remarquons que cette démarche permet d'entamer le processus de modélisation d'une situation aléatoire de la réalité vers n'importe quel modèle probabiliste, par la reconnaissance de la configuration de l'expérience abstraite intervenant dans le domaine pseudo-concret. Nous nous limitons à la reconnaissance d'une expérience de Bernoulli, qui est l'objet de cette recherche.

Dans le cadre de notre étude, l'expérience aléatoire représente l'abstraction d'une expérience réelle, explicitée par un protocole expérimental et une liste des issues possibles pour cette expérimentation. Mais on doit considérer que c'est vraiment l'aléatoire qui est en jeu dans cette expérience : « *à un micro-niveau, le processus aléatoire apparaît soumis à l'irrégularité, mais vu sous l'angle du macro-niveau on peut en dégager des régularités* » (Borovcnik et Peard, 1996, p. 240) [(21)]. Le caractère expérimental de la démarche que nous proposons a pour objectif de mettre en évidence ce passage du micro-niveau au macro-niveau.

§4.2. L'urne de Bernoulli comme modèle pseudo-concret

Pourquoi utiliser un modèle d'urne pour un premier contact avec la modélisation probabiliste ? Nous proposons une réponse à cette question dans de ce sous-paragraphe.

Dans un premier temps, l'urne de Bernoulli se présente comme le modèle pseudo-concret qui permet d'exprimer le processus de modélisation, tout en restant dans le domaine pseudo-concret. Un point important dans ce travail est la possibilité d'un travail d'abstraction non problématique pour l'élève, car il peut se construire ce modèle d'urne à partir de l'abstraction d'un pot réel, rempli de perles colorées.

Un deuxième point à développer vient de la constatation que la plupart des lois probabilistes discrètes standard, à univers fini, peuvent être représentées par des schémas d'urnes [(22)]. Elles modélisent plusieurs phénomènes classiques aléatoires rencontrés dans la réalité et utilisés en pratique, comme lors de certains tests de contrôle statistique de qualité. D'après H. Raymondaud, « *ces modèles d'urnes servent à décrire en des termes pseudo-concrets, certaines expériences aléatoires composées d'une ou plusieurs épreuves dont les résultats possibles sont résumés en un certain nombre de caractéristiques qualitatives* ». (Raymondaud, 1997, p. 251).

Alors, si une situation aléatoire de la réalité peut être interprétée comme un tirage au sort dans une population consistant à associer aux résultats possibles des caractéristiques qualitatives que l'on souhaite observer, cette situation pourra être représentée par un modèle d'urne. En plus, si ces caractéristiques sont dichotomiques, alors nous pouvons modéliser la situation en jeu par une urne de Bernoulli, *outil didactique de base pour l'enseignement de la probabilité*. En donnant un exemple d'un contrôle statistique de qualité réalisé par une entreprise, M. Henry donne la définition suivante de l'urne de Bernoulli :

> *Pour modéliser cette situation, on considère une urne (fictive) contenant une proportion* ***p*** *de boules blanches et* ***1-p*** *de boules*

[(21)] "(…) randomness with its irregular patterns at a micro-level and regular consequences at a macro-level."

[(22)] Un schéma d'urne est le « mode d'emploi » de la répétition d'une expérience de tirages *au hasard* dans une urne.

> *noires. C'est une* ***urne de Bernoulli****, l'outil de base du probabiliste. La production d'une pièce est représentée par un* ***tirage au hasard d'une boule, avec probabilité p d'être blanche****.* (Henry, 1997a, p. 79).

Nous trouvons aussi une définition de modèle d'urne dans la thèse de Zaki (1990). L'auteur caractérise le modèle d'urne par sa composition et par le type de tirage qu'on veut en faire.

> *Un modèle d'urne est constitué d'une ou de plusieurs urnes contenant des boules (avec différentes couleurs et avec éventuellement des numéros) dans laquelle (ou dans lesquelles) on fait des tirages. (...) Un modèle d'urne constitué d'une seule urne est entièrement déterminé par :*
>
> - ♦ *La composition de celle-ci :*
>   - ➢ *Les couleurs des boules : on utilisera par exemple blanc, noir, rouge, bleu, etc. ou/et on numérotera par exemple les boules par 0, 1, 2, 3, etc.*
>   - ➢ *Le nombre de boules dans l'urne, et là il y a deux cas :*
>   - ▪ *Fini : on utilisera un nombre fini de boules pour chaque couleur ou/et numéro ;*
>   - ▪ *Indéfini : on utilisera des proportions de boules.*
> - ♦ *La nature du tirage effectué dans celle-ci : avec ou sans remise.*

Zaki présente ensuite un exemple de modélisation d'un jeu de pile ou face en donnant la composition de l'urne de Bernoulli en question :

> *(...) Un exemple de modèle d'urne très connu est celui de Bernoulli. Ce modèle est constitué d'une seule urne, dont la composition est la suivante :*
>
> - ✓ *Deux couleurs : blanc et noir,*
> - ✓ *Deux boules dans le cas le plus simple : une blanche et une noire, et on y effectue des tirages avec remise.*
>
> *Ce modèle (de Bernoulli) traduit l'expérience qui consiste à jeter une pièce de monnaie équilibrée (pile ou face).* (Zaki, 1990, p. 45).

Zaki utilise cette définition comme rappel aux étudiants avant l'énoncé des questions qui composaient son questionnaire. Il utilise un panel composé par 125 étudiants de deuxième année de DEUG et la question qu'il se pose est de savoir si l'appréhension des notions probabilistes élémentaires est intériorisée de façon à rester stable, quel que soit le type de situations présentées.

Ces trois présentations du modèle d'urne se recouvrent. Pour la suite de ce travail, nous **retiendrons le caractère pseudo-concret de ce modèle et la possibilité de le déterminer complètement par la proportion des boules blanches dans l'urne**. Nous appellerons « *succès* » le fait d'obtenir une boule blanche lors d'un tirage *au hasard* dans cette urne. La définition à retenir pour notre ingénierie didactique sera donc :

> **« Une Urne de Bernoulli est une urne qui contient des boules supposées parfaites, identiques, qui ont toutes la même chance d'être tirées dans un prélèvement "au hasard" d'une de ces boules. Dans cette urne, les boules sont de deux couleurs différentes, blanches ou noires, et les blanches sont en proportion "p". Une urne de Bernoulli nous servira pour représenter abstraitement une expérience aléatoire à deux issues possibles : succès (boule blanche) ou échec (boule noire). »**

Cette définition permet une explicitation du modèle choisi pour représenter une situation aléatoire en restant dans le domaine pseudo-concret et, par conséquent, cette explicitation est alors accessible aux élèves au niveau du Collège. Elle suppose seulement que la proportionnalité soit, chez les élèves, une connaissance au moins mobilisable au sens de A. Robert (1998).

Précisons les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les élèves, relativement à un niveau scolaire donné (Robert, 1998, pp. 165-168).

- ***Le niveau technique*** : il implique la mise en fonctionnement d'une connaissance dans des contextualisations simples, locales, sans travail préliminaire de reconnaissance, sans adaptations. C'est le niveau des applications immédiates.
- ***Le niveau mobilisable*** : il implique la mise en fonctionnement d'une connaissance par un début de juxtaposition de savoirs. Ce sont des applications où il faut adapter ses connaissances au contexte particulier. Par exemple, par un changement de point de vue ou de cadre, mais avec indications (soit données par l'enseignant, soit par l'énoncé).
- ***Le niveau des connaissances disponibles*** : ce niveau correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, d'aller rechercher soi-même dans ces connaissances ce qui peut intervenir.

En revenant à notre schéma de modélisation, nous pouvons alors le compléter par la dernière étape à la charge des élèves au niveau du collège : l'explicitation de l'urne de

Bernoulli choisie pour modéliser la situation de la réalité en jeu, par la détermination d'une composition caractéristique. Autrement dit, expliciter l'urne de Bernoulli déterminée par la donnée de la proportion p de boules blanches. Reprenons alors le schéma 6 que nous venons de présenter au paragraphe §4.1, en le spécifiant :

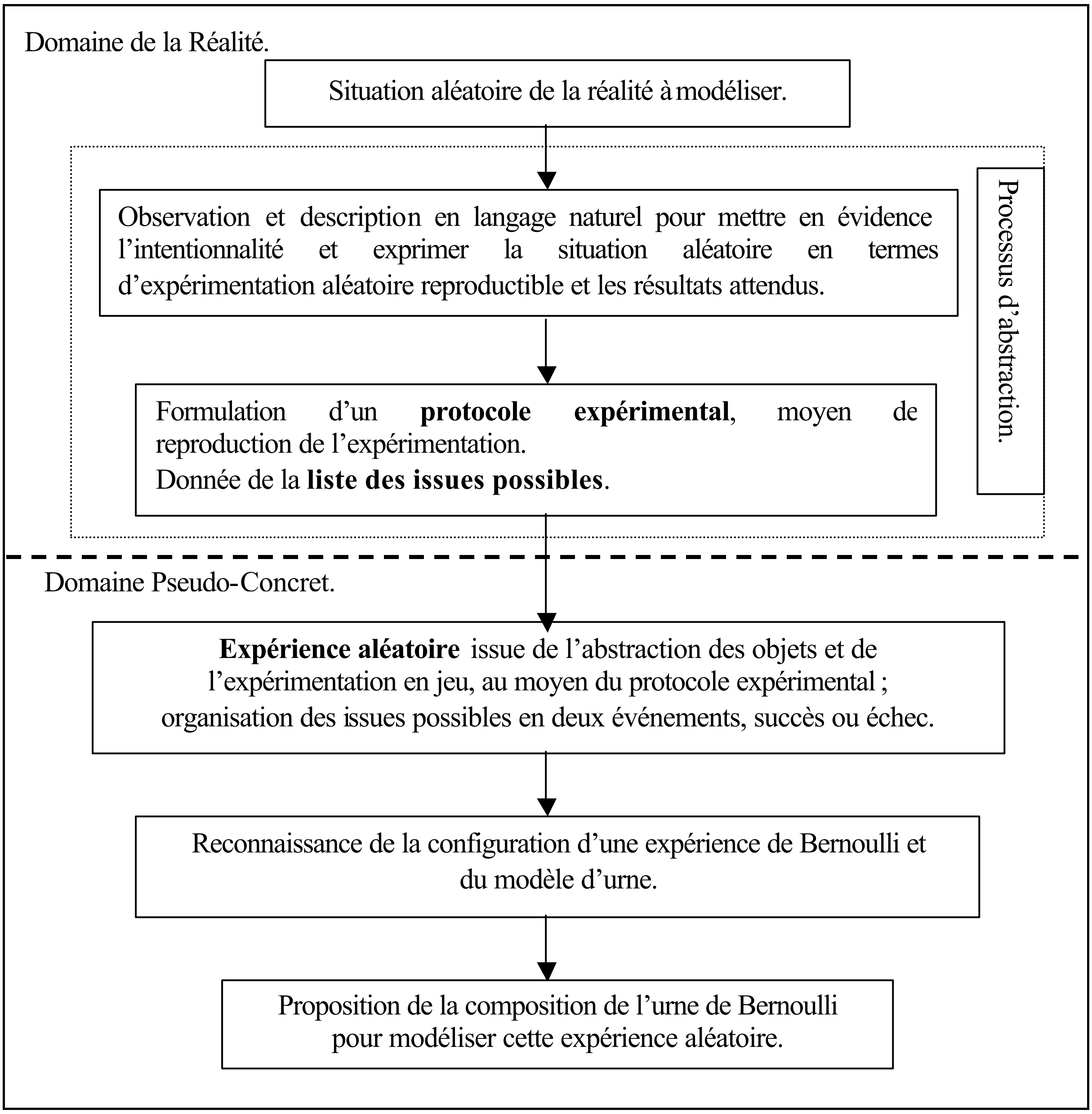


Schéma 7

Il s'agit alors de mettre en fonctionnement une connaissance-en-acte chez l'élève qui permet une évaluation des chances d'obtenir un succès lors d'un tirage *au hasard* dans l'urne de Bernoulli choisie.

Nous utiliserons pour cela le terme ***pré-probabilité***. Cette notion est une réponse didactique à la nécessité de relier la composition de l'urne de Bernoulli à la probabilité d'un succès sans introduire à ce niveau une définition formelle de la probabilité.

> ***La pré-probabilité est la connaissance-en-acte de l'élève qui associe les "chances" d'obtenir un succès lors de la réalisation d'une expérience aléatoire au rapport entre le nombre de boules blanches et le nombre total de boules dans l'urne de Bernoulli qui modélise cette expérience.***

Elle peut s'exprimer de différentes manières : comme un rapport de « chances » au sens de Fermat, comme simple comparaison entre diverses situations, comparaisons exprimées par « j'ai plus de chances que… », comme un pourcentage, ou autres types de registres et écritures. Cette idée sera développée dans le sous-paragraphe qui suit.

§4.3. L'introduction d'un nouveau concept : la pré-probabilité

Ce sous-paragraphe se situe dans l'objectif premier de ce chapitre : dégager la nécessité d'un travail didactique sur les connaissances-en-acte de l'élève, connaissances qui interviennent lors de l'apprentissage de la modélisation des situations aléatoires de Bernoulli et de la notion de probabilité. Nous nous posons alors les questions suivantes :

- Quel est l'intérêt didactique de la notion de pré-probabilité ?
- Cette notion permet-elle d'établir un lien opératoire entre l'évaluation « intuitive » ou « naïve » des chances d'obtenir un succès dans une situation de Bernoulli, et la proportion de boules blanches dans l'urne qui modélise cette situation ?

Nous nous demandons si la notion de pré-probabilité est une connaissance-en-acte présente et observable chez les élèves. En tant que connaissance-en-acte, elle ne s'exprime pas par des définitions formelles au sein d'un modèle théorique, comme c'est le cas de la définition traditionnelle de la probabilité donnée par Laplace dans son premier principe, déjà citée dans notre Chapitre I. Cette connaissance-en-acte s'exprime plutôt comme la perception des chances d'obtenir un succès lors de la réalisation d'une expérience de Bernoulli, pour laquelle on connaît la proportion qui caractérise les deux modalités du caractère étudié dans la population en jeu.

Donnons un exemple. Supposons que l'expérience concrète consiste à tirer *au hasard* une perle dans un pot contenant 15 perles blanches et 45 perles noires. L'élève évalue les chances d'obtenir une perle blanche lors d'un tirage *au hasard* dans ce pot à partir de la connaissance effective ou estimée de cette proportion : il y a 25 % de perles blanches, soit en conséquence,

« une chance sur quatre d'obtenir une boule blanche lors d'un tel tirage ».

Remarquons la distinction entre la notion de pré-probabilité et celle de proportion dans l'urne de Bernoulli : cette distinction est due à la prise en compte de l'intervention du hasard pour passer du cadre de la proportionnalité à celui de la probabilité. Explicitons ce point. L'élève peut facilement reconnaître la proportion qui existe dans l'urne de Bernoulli, dès le début du Collège. Citons un extrait de la présentation du programme de Mathématique pour le cycle central (5^e et 4^e), lors qu'il présente les trois domaines à développer, la géométrie, le domaine numérique et l'organisation et gestion de données :

> *Dans ces trois domaines d'études, la proportionnalité apparaît comme un fil conducteur : afin de favoriser sa maîtrise, le programme propose de nombreuses situations géométriques, numériques ou graphiques.*

En plus, lors de l'explicitation des contenus pour la classe de 5^e, la colonne « Commentaires » pour le contenu « Relevés statistiques » rajoute :

> *La notion de fréquence est notamment utilisée pour comparer des populations d'effectifs différents, et faire le lien avec la proportionnalité.*

L'élève peut ainsi s'apercevoir de l'équivalence de deux urnes vis-à-vis de cette proportion. Ces actions ne sont pas coûteuses pour les élèves car elles ne demandent pas d'opérations complexes au niveau de la mobilisation des connaissances mathématiques déjà acquises. C'est lors de la mise en fonctionnement d'un tirage *au hasard* dans une telle urne de Bernoulli que ces connaissances, proportionnalité et fréquences, deviennent insuffisantes : il faut que l'élève interprète son appréhension du hasard par l'équiprobabilité des boules dans l'urne. L'action d'assimilation-en-acte entre le hasard et la proportion des boules aboutit à la mobilisation de la pré-probabilité. C'est la « transformation » d'une proportion en une évaluation des chances d'obtenir un succès.

On passe alors, dans le processus de modélisation, du domaine de la réalité au domaine pseudo concret : **d'une perception intuitive des chances** d'obtenir un certain résultat d'une expérience aléatoire de la réalité **à l'évaluation de la pré-probabilité** de l'issue représentative lors de la réalisation en pensée de l'expérience aléatoire. Ainsi, dans notre exemple, l'élève prend connaissance de la composition du pot (25 % de perles blanches). Ensuite, par un passage au domaine pseudo-concret, l'élève remplace le pot par une urne idéale, les perles par des boules et l'expérience concrète par une expérience de pensée. L'objectif de ce passage au pseudo-concret est d'accéder à la pré-probabilité d'obtenir un succès lors d'un tirage *au hasard* dans cette urne, même si elle est encore formulé par «une chance sur quatre ».

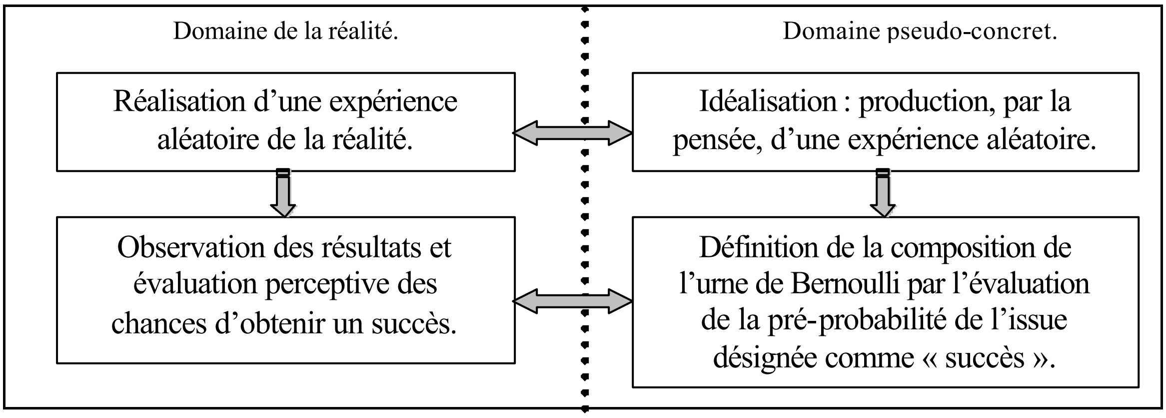


Schéma 8

§4.3.1. Les connaissances spontanées des élèves

Du fait que l'installation d'une conception opératoire de la pré-probabilité chez l'élève est liée à ses connaissances spontanées, nous nous posons les questions : quelles sont ces connaissances ? comment peuvent-elles devenir opératoires dans un contexte scolaire ?

Dans un premier temps, regardons les recherches qui portent sur l'intuition des élèves à propos des fréquences. D'après Cañizares (1997) [23], dans une situation dans laquelle l'élève doit prédire le prochain résultat d'une expérimentation après avoir observé une série de réalisations d'une même expérience, « *l'enfant adapte ses prédictions aux résultats qu'il observe, même si ses réponses ne coïncident pas complètement avec les fréquences observées.* » (Cañizares, 1997, p. 51). L'auteur présente deux explications possibles : soit une *intuition primaire d'anticipation* (Fischbein), soit des *intuitions fondées sur des jugements heuristiques* (Echeverría). Par la suite, l'auteur signale que ces intuitions liées à la fréquence des événements s'améliorent avec l'âge, surtout si elles présentent un résultat pratique. (Cañizares, 1997, p. 51) [24]. Cette constatation est très importante pour notre recherche parce que nous cherchons à rendre opérationnelle la liaison entre ces intuitions et la proportion de boules dans l'urne de Bernoulli modèle au moyen de la pré-probabilité chez les élèves au niveau du Collège.

---

[23] L'expérience mise en œuvre par Cañizares est fondée sur les résultats obtenus précédemment par les recherches de Fischbein et Gazit, en 1984, ainsi que par les résultats obtenus par Green, lors d'une étude menée avec des élèves de 11 à 16 ans, de 1978 à 1981.
[24] " *las investigaciones que se han realizado con diferentes niveles de edad han demonstrado que el adolescente ha progresado en comparación a los ninos más pequeños en lo que se refiere a la intioción de la frecuencia relativa, particularmente en casos donde las predicciones tienen algún resultado práctico.*"

Cañizares présente aussi, dans ce même chapitre, un bilan de l'étude de plusieurs travaux publiés dans le domaine de l'apprentissage de la probabilité, tels que ceux de Piaget et Inhelder, Fischbein, Hoeman et Ross. L'auteur cite aussi le travail de Pérez Echeverría, qui présente un résumé des recherches sur la probabilité et la corrélation dans le cadre théorique de la psychologie cognitive. Notre intérêt porte sur des activités de comparaison entre deux expériences, afin d'établir leur équivalence et, en conséquence, la possibilité de leur représentation par un seul modèle d'urne de Bernoulli. Nous retenons ainsi deux résultats partiels de ces recherches :

> *Les enfants à l'âge de 9-10 ans peuvent résoudre des problèmes de comparaison de probabilités d'un même succès A dans deux expériences différentes, seulement si dans ces deux expériences les nombres des cas favorables ainsi que les nombres des cas défavorables sont les mêmes. (Leurs estimations sont fondées sur des comparaisons d'entiers).*
>
> *(...)Pour l'estimation des possibilités (chances) favorables ou non favorables par rapport à un résultat pré-établi, les adolescents présentent une meilleure performance que les enfants. Lorsque le matériel expérimental est un récipient rempli de boules, les élèves âgés de 12 ans donnent toujours des réponses correctes, même s'il faut qu'ils comparent des rapports dont les deux termes sont différents.* (Cañizares, 1997, pp. 52-53) [(25)].

Les résultats obtenus par Cañizares montrent ainsi que, si pour les enfants de 9-10 ans la comparaison s'effectue en termes de nombres entiers, la comparaison des rapports n'est plus problématique pour les élèves âgés de 12 ans et plus. Cependant, les résultats obtenus par Bordier (1991) avec des élèves de 13-14 ans nous indiquent que cette comparaison n'est pas toujours spontanément effectuée. Lorsqu'il propose la comparaison entre deux expériences qui consistent à tirer une boule *au hasard* d'un chapeau choisi parmi deux chapeaux dont la composition était proportionnelle (2 boules blanches + 3 boules noires contre 4 boules

---

[(25)] "*Los niños de 9-10 años pueden resolver problemas qui impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso A en dos experimentos diferentes sólo en situationes donde, bien el número de casos favorables o el número de casos non favorables a A son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias) (...) El logro de los adolescentes estimando posibilidades a favor y en contra de un resultado es superior al de los niños pequeños. Cuando el material experimental consiste en un recipiente con bolas, los niños de 12 años dan respuestas correctas desde el principio, incluso en casos en que tienen que comparar razones com términos desiguales.*"

blanches + 6 boules noires), l'auteur remarque qu'un certain nombre d'élèves ne font pas appel spontanément à cette proportionnalité, et ajoute qu'une appréhension fréquentiste fait augmenter les réponses correctes. Les analyses de Bordier à ce propos indiquent que :

> *Si l'on avait demandé aux élèves de prévoir, pour mille tirages, le nombre approximatif de ceux où, dans chaque situation, on obtiendrait une boule blanche, les résultats auraient peut-être été différents. En effet, dans une telle situation, l'élève devrait être plus porté à considérer les rapports. Lorsque il s'agit d'un tirage unique, les élèves semblent être portés à ne pas considérer ces rapports.* (Bordier, 1991, p. 46).

Comme exemple d'argumentation des élèves qui ne font pas appel à la proportionnalité, Bordier présente des affirmations du type :

- ✓ « *il y a moins de boules noires* » ;
- ✓ « *il y a moins de boules en tout* » ;
- ✓ « *il y a plus de blanches* » ;
- ✓ « *on dirait que dans le chapeau bleu on a plus de chances même si nos chances de gagner sont pareilles* ».

Remarquons ici quelques-uns des arguments trouvés aussi par Maury (1986). Nous observons que Maury a travaillé avec des élèves en classe de seconde, de terminales A, C et D et aussi des élèves en Deug Psychologie et Deug scientifique.

Parmi les arguments que l'auteur décrit et analyse dans le chapitre IV de sa thèse, citons par exemple celui selon lequel l'élève ne considère pas la proportion, mais la différence entre le nombre des cas favorables et le nombre des cas non-favorables : « *La procédure consiste à faire pour chacun des sacs (des roulettes) la différence entre les nombres de cas favorables et défavorables (ou l'inverse) à comparer ces deux différences et à conclure.* » (Maury, 1986, p. 148).

Nous avons ainsi présenté une lecture de ces travaux par le biais de la notion de pré-probabilité. Nous constatons alors que **l'association entre cette notion et l'appréhension de la proportion de boules blanches dans une urne de Bernoulli peut être facilitée par la réalisation (effective ou idéalisée) d'un grand nombre de répétitions de l'expérience. Cette approche expérimentale va se situer dans deux appréhensions : celle des « chances**

de tirer une boule blanche » et celle d'indiquer approximativement la fréquence de succès en *n* expérimentations. Ces deux approches sont confortées lorsque l'élève peut les référer à un modèle d'urne de Bernoulli.

Pour ce qui nous concerne, nous avons donc placé notre étude dans la tranche d'âge 14-16 ans. Nous avons fait ainsi l'hypothèse que les comparaisons faites par ces élèves entre des situations aléatoires simples se font plutôt en termes non plus d'entiers, mais de proportion, expression d'une connaissance-en-acte significative d'un niveau cognitif : la pré-probabilité.

Conclusion : La démarche de modélisation proposée

Le développement de ce chapitre nous permet la construction de conjectures à propos des conditions didactiques nécessaires pour la mise en fonctionnement d'une démarche de modélisation dont l'objectif est de permettre aux élèves au niveau du Collège de s'engager dans un travail sur l'aléatoire.

Nous avons aussi dégagé une nécessité de rendre disponibles pour ces élèves des éléments théoriques en vue de l'installation d'une technologie, au sens de Chevallard (1996, 1999). L'objectif est de leur rendre accessible la compréhension des techniques qui résolvent la tâche « *modéliser une situation aléatoire par une urne de Bernoulli* ». Une telle technologie comportait alors des notions comme « expérience aléatoire », « urne de Bernoulli » et « pré-probabilité ». Elle devrait conduire au passage du domaine de la réalité au domaine pseudo-concret, passage pour nous nécessaire comme première étape de la modélisation.

Les élèves ont alors besoin de quelques pré-requis. D'abord les notions mathématiques de proportionnalité et de fréquence. La lecture des programmes actuels nous permet de constater que ces connaissances sont au moins mobilisables depuis la classe de 5e. Les élèves ont besoin aussi d'une capacité d'abstraction pour atteindre un niveau de raisonnement plus théorique afin de faire le passage du domaine de la réalité au domaine pseudo-concret.

Nous nous posons alors les questions suivantes :

- **Comment rendre accessible aux élèves les notions de base que nous avons présentée comme nécessaires à l'installation de la technologie proposée ?**
- **Cette technologie-là, est-elle suffisante pour la compréhension de la démarche de modélisation que nous souhaitons mettre en fonctionnement comme un premier traitement de l'aléatoire en collège ?**

CHAPITRE III : PROBLÉMATIQUE, MÉTHODOLOGIE ET ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE

Introduction

L'objectif de ce chapitre est, d'abord, de reprendre la problématique de cette thèse, dont les éléments ont été dégagés au fur et à mesure du développement des chapitres précédents. Ensuite, nous présentons la méthodologie que nous adoptons et les contraintes techniques pour la mise en place de cette méthodologie. Nous préciserons alors les parties constitutives de l'ingénierie didactique que nous avons construit pour l'apprentissage de la démarche de modélisation proposée au Chapitre II, ainsi que le fonctionnement de l'environnement informatique que nous avons mis en place.

Au cours de ce chapitre, nous nous proposons de développer des éléments de réponse à la ***question principale de cette recherche*** :

« Dans quelles conditions didactiques les élèves peuvent-ils se familiariser avec des situations aléatoires en contexte scolaire et s'engager dans une appréhension en termes de modèle de telles situations dès le Collège ? »

§1. Synthèse de la problématique

§1.1. Les objectifs et les hypothèses de travail

Dans ce paragraphe, nous présenterons une synthèse de nos objectifs, de nos questions et de nos hypothèses pour cette recherche, qui ont déjà été introduites au cours des deux premiers chapitres. Nous proposons ainsi, de façon explicite, le sujet de ce travail :

Notre étude porte sur les conditions dans lesquelles on peut introduire les premiers contacts avec des situations aléatoires au niveau du Collège. En particulier, nous étudierons les conditions de leur modélisation en vue d'un premier apprentissage des notions probabilistes élémentaires.

Il ne s'agit pas ici de proposer aux élèves de construire un modèle probabiliste. Nous souhaitons introduire des éléments pour leur permettre de reconnaître la configuration d'une expérience de Bernoulli [26] ainsi que maîtriser le modèle pseudo-concret qui la représente, lorsqu'ils observent une situation aléatoire de la réalité. Autrement dit, il s'agit d'introduire une familiarité avec les situations aléatoires et de donner aux élèves les moyens de décrire ces situations (concepts et vocabulaire) en termes de modèles pseudo-concrets. Ce travail de description, fait par les élèves, débouche sur l'explicitation du modèle de « *l'urne de Bernoulli* » modélisant les situations aléatoires en jeu, dans l'objectif de résoudre des problèmes d'évaluation d'une probabilité. Les raisons de nous limiter aux expériences aléatoires de Bernoulli ont été introduites au Chapitre I et reprises dans l'introduction du Chapitre II.

Le chapitre II présente aussi les avantages de l'utilisation de l'urne de Bernoulli pour un premier contact avec la modélisation des situations aléatoires :

- Premièrement, ce modèle permet d'exprimer le processus de modélisation de façon complète : de l'observation de la situation à modéliser jusqu'à l'explicitation du modèle qui la représente, tout en restant dans le domaine pseudo-concret accessible aux élèves de ce niveau.
- Deuxièmement, la plupart des lois discrètes standard à univers fini, représentatives d'autres types d'expériences aléatoires, peuvent être construites à partir de ce modèle.

Remarquons qu'en outre, l'introduction de la notion de pré-probabilité renforce notre choix didactique pour l'utilisation du modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli dans une démarche de modélisation, parce que ce modèle permet la coexistence des deux approches de la notion de probabilité : l'approche classique ou laplacienne, et l'approche fréquentiste.

À partir de ce qui précède, nos **objectifs de recherche** sont les suivants :

Étudier les conditions d'initiation aux phénomènes aléatoires pour des élèves au niveau du Collège. En particulier :

- ✓ **Étudier les conditions de l'introduction du hasard et de son interprétation dans un domaine pseudo-concret, par l'utilisation d'un langage quotidien pour décrire des situations aléatoires simples qui seront proposées aux élèves.**
- ✓ **Étudier les effets de l'introduction du domaine pseudo-concret comme première étape d'un processus de modélisation des situations aléatoires.**

---

[26] Selon le paragraphe §4.1 du Chapitre II, nous pouvons définir la configuration d'une expérience de Bernoulli comme une expérience aléatoire qui résume les issues possibles par deux évènements, « succès » ou « échec ».

Précisons alors les hypothèses dans lesquelles se situent ces objectifs.

> Il s'agit, selon les termes de A. Robert (1992), de « *(...) replacer la recherche dans des hypothèses plus générales dans lesquelles elle peut s'inscrire, que soient des hypothèses qu'on a admises ou celles qu'on cherche au contraire à tester.* » (Robert, 1992, p. 40).
> Selon notre terminologie, les hypothèses admises sont appelées les hypothèses de travail (HTi). Celles que l'on cherche à tester sont appelées les hypothèses de recherche (HRj). Elles correspondent aux questions auxquelles le travail théorique et l'expérimentation réalisée cherchent à répondre.

Énonçons ci-dessous nos **hypothèses de travail** :

HT$_1$: les élèves ont déjà eu des contacts avec des situations aléatoires, ainsi qu'avec plusieurs types de générateurs de hasard en dehors de leur vie scolaire, même s'ils ne les ont pas perçus comme tels.

Par exemple, dans les jeux de hasard, la manipulation du générateur de hasard comme le dé, la roulette, les cartes, entre autres, fait partie de la règle du jeu. Citons aussi les sondages dans lesquels les échantillons sont issus de prélèvements aléatoires dans la population, la question étant de comprendre ces techniques et de les rendre crédibles. Nous pouvons alors justifier cette hypothèse de travail comme un choix fait dans le cadre théorique des «champs d'expériences » :

> *Le concept de "*champ d'expérience*" (Boero, 1989a, 1992, 1994b), qui a été introduit afin d'analyser les problèmes rencontrés quand, dans l'apprentissage des mathématiques, les contextes des étudiants sont pris en compte. En bref, dire "champ d'expérience" est équivalent à dire "un secteur de culture humaine dont le professeur et les étudiants peuvent reconnaître et considérer comme unitaire et homogène". (...) En étudiant les problèmes d'apprentissage liés à un champ de l'expérience donné, les rapports complexes qui sont développées à l'école entre "contexte intérieur" de l'étudiant (expérience, représentations mentales, procédures en rapport au champ de l'expérience), le "contexte intérieur" du professeur et le "contexte externe" (signes, objets, détail objectif de contraintes du champ de l'expérience) doivent être considérés.*
> *(...) dans certains champs d'expériences du monde réel, les étudiants peuvent acquérir les outils mathématiques et les stratégies de pensée qu'il emploiera pour penser et agir plus efficacement dans le même ou dans d'autres champs d'expérience. Ces outils peuvent également*

devenir les éléments de base pour approcher (par la médiation du professeur) les champs d'expériences dans un cadre mathématique. (Boero et al., 1995, p. 153) [27].

Revenons à nos hypothèses de travail, fondées toujours sur le vécu des élèves. Par rapport aux connaissances acquises pendant leur scolarité, les programmes des classes du Collège introduisent les notions de proportion et de fréquence d'une propriété ou d'un caractère dans une population, ou d'une partie de celle-ci.

HT_2 : on suppose que ces connaissances sont alors au moins mobilisables chez les élèves. En conséquence, les élèves peuvent reconnaître une situation de proportionnalité lors d'un travail expérimental se situant dans plusieurs registres, et en lui associant divers types d'écritures.

Ainsi, les fractions, les décimaux et les pourcentages peuvent être utilisés dans le travail avec des fréquences obtenues expérimentalement par un très grand nombre de réalisations d'une expérience aléatoire.

Nous pouvons citer à ce sujet les termes du programme de Mathématiques pour la classe de 5^{e}, pour le contenu « Relevés Statistiques ». Lorsqu'il explicite les compétences exigibles et les commentaires par rapport au contenu « fréquence », le programme met en évidence le lien entre la proportionnalité et la notion de fréquence :

La notion de fréquence est notamment utilisée pour comparer des populations d'effectifs différents, et faire le lien avec la proportionnalité. Les écritures 4/10, 2/5, 0,4 (ou en notation anglo-saxonne 0.4 ou .4), 40 %, qui peuvent être utilisées pour désigner une fréquence, permettent d'insister sur les diverses représentations d'un même nombre. (B.O. hors-série 1998, Programme de 5^{e} et 4^{e}, Mathématiques, p. 10).

---

[27] *"(...) the concept of "field of experience (Boero, 1989a, 1992, 1994b), which was introduced in order to analyze the problems met when, in teaching-learning mathematics, contexts the students are acquainted with are referred to. In short, saying field of experience we mean a sector of human culture which the teacher and students can recognize and consider as unitary and homogeneous. (...) In studying teaching-learning problems related to a given field of experience, the complex relationships which is developed at school between the student's "inner context" (experience, mental representations, procedures concerning the field of experience), the teacher's inner context and the external context (signs, objects, objective constraints specific of the field of experience) must be considered.*
(...) In certain real world fields of experience, students may acquire mathematical tools and thinking strategies which he/she will use to think and act more effectively within the same or within others fields of experience. These tools may also become the basic elements to approach (through the teacher's mediation) the mathematical fields of experience."

§1.2. Les hypothèses de recherche

Plusieurs travaux témoignent de l'existence d'une confusion réalité-modèle lorsque les élèves sont censés résoudre des problèmes d'évaluation de probabilités. Citons par exemple les articles publiés par Girard et Parzysz (1998) et Raymondaud et Henry (1998), qui mettent en évidence ces confusions intervenant dans un jeu contractuel. De plus, selon Henry,

> *Pour approfondir cette question, on est immanquablement amené à séparer la description de situations réelles (comme nous y invite le programme) des modèles simplifiés qui permettent de les mathématiser. Cette distinction se révèle maintenant essentielle pour que les élèves s'y retrouvent eux-mêmes et sachent ce qu'on attend d'eux. En termes didactiques, il s'agit de clarifier les éléments des contrats didactiques relatifs aux activités en probabilités.* (Henry, 1997c, p. 55).

Considérons une des conclusions du Chapitre I, qui limite notre champ de problèmes aux « ***situations aléatoires potentiellement reproductibles qui peuvent être associées à un tirage au hasard dans une population, produisant deux résultats possibles : succès ou échec*** », selon le schéma présenté au paragraphe §1.4 du chapitre I. Dans ce travail, nous partons de la nécessité, pour les élèves, d'acquérir les concepts probabilistes élémentaires [28] et de les mettre en œuvre. Cette acquisition a pour objectif de permettre aux élèves des aller-retours entre la réalité et le modèle pseudo-concret, aller-retours qui sont propices à la compréhension de la classe de problèmes probabilistes en jeu et à leur résolution.

Nous avons aussi retenu la notion de ***modèle comme une représentation abstraite, simplifiée et idéalisée de la réalité, construite par le choix d'un ensemble de propriétés caractéristiques à retenir. Ainsi, nous envisageons de représenter les classes de situations considérées par des modèles pseudo-concrets d'urne de Bernoulli***. Le choix de ce modèle d'urne est le moins problématique pour ce type d'apprentissage, comme nous l'avons indiqué au Chapitre II.

---

[28] L'appréhension du hasard, la notion de probabilité et de modèle, ainsi que les notions introduites à des objectifs didactiques, comme celle de domaine pseudo-concret, d'expérience aléatoire et d'urne de Bernoulli.

Nous pouvons alors énoncer notre hypothèse de recherche principale :

HRP : **la double démarche d'expérimentation et de modélisation permet aux élèves au niveau du Collège d'acquérir des outils de représentation et d'interprétation des phénomènes aléatoires, allant jusqu'à l'estimation d'une probabilité.**

Cette estimation est l'expression d'une connaissance-en-acte que nous avons appelé **pré-probabilité (29).**

Remarquons que cette démarche permet l'explicitation des différents domaines dans lesquels les élèves doivent se placer à chaque étape du processus de modélisation : le domaine de la réalité et le domaine pseudo-concret.

Reprenons ci-dessous le schéma 7 présenté au paragraphe 4.2 du Chapitre II et qui illustre la démarche pour l'installation d'un tel processus, en précisant les trois phases de cette démarche : la phase d'abstraction, la phase de modélisation et la phase de validation du modèle.

(29) La pré-probabilité est une connaissance-en-acte de l'élève qui associe les « chances » d'obtenir un succès lors de la réalisation d'une expérience aléatoire au rapport entre le nombre de boules blanches et le nombre total de boules dans l'urne de Bernoulli qui modélise cette expérience. Alors, la distinction entre la proportion dans l'urne de Bernoulli et la pré-probabilité est la prise en compte du hasard lors d'un tirage aléatoire dans cette urne. (cf. §4.3 du Chapitre II).

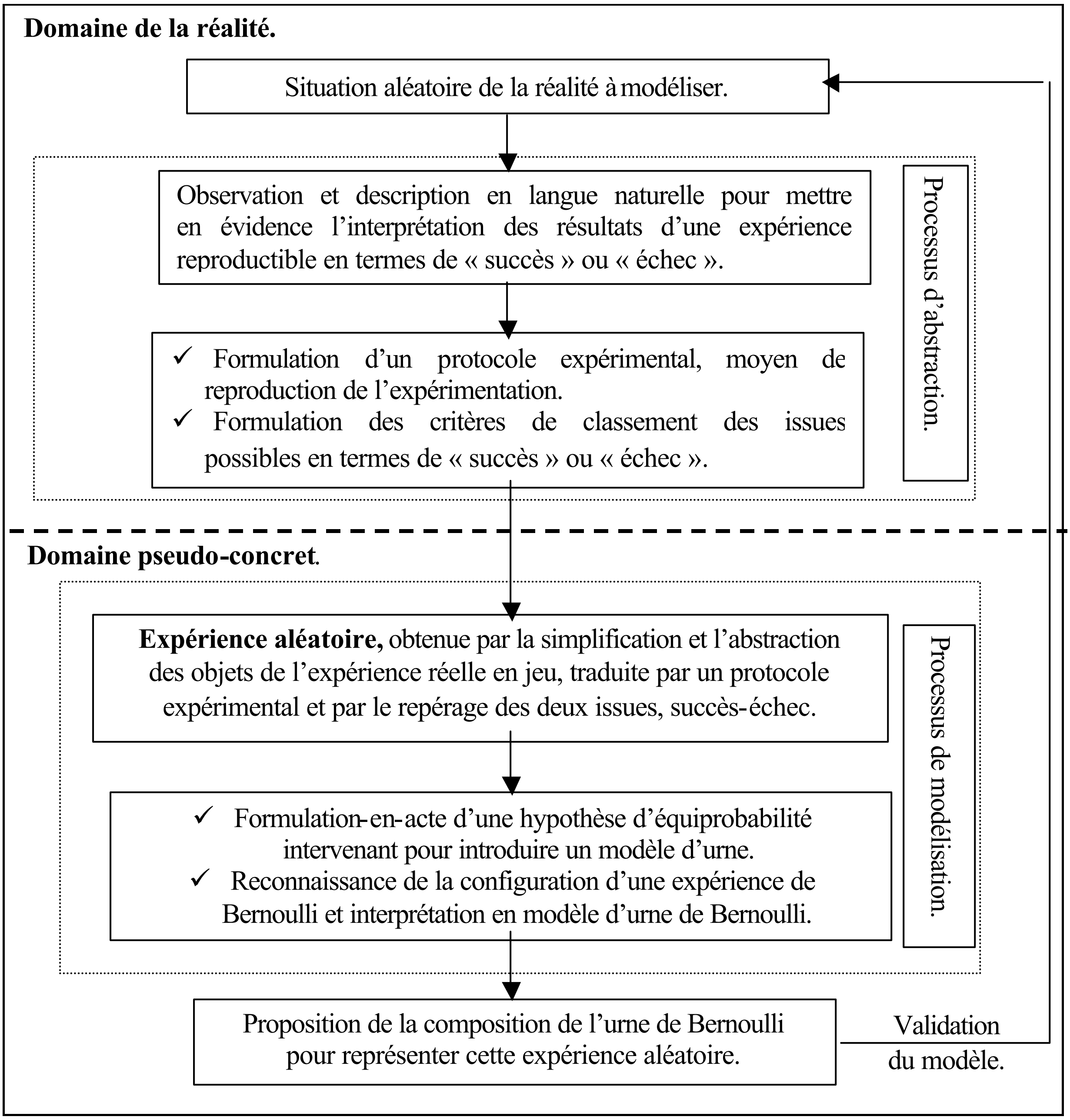


Schéma 9

Considérant la limitation aux situations aléatoires de Bernoulli pour un travail de familiarisation avec le hasard en Collège, ainsi que la démarche de modélisation illustrée dans le schéma ci-dessus, nous sommes conduits à proposer deux **sous-hypothèses de recherche** :

HR$_1$: les activités d'observation et de description d'une situation de la réalité sont essentielles pour la construction de la notion d'expérience aléatoire par les élèves et, en conséquence, elles sont essentielles pour le processus de modélisation en jeu.

Soulignons le rôle du langage [30] dans cette première étape du processus de modélisation, notamment, lors des interactions entre les élèves dans un contexte de situation de communication invoquée :

- Le langage est un outil pour la mise en fonctionnement d'une appréhension du hasard conforme à la délimitation du champ de problèmes que nous avons fait au chapitre I (appréhension du type « hasard reproductible »). Autrement dit, lorsque les élèves verbalisent en langage naturel l'observation faite, le dialogue établi est l'outil d'identification et de caractérisation des situations aléatoires potentiellement reproductibles, notamment pour clarifier l'intervention du hasard dans la situation.
- Le langage est un outil pour la maîtrise des concepts opératoires pour la démarche de modélisation envisagée. Autrement dit, l'installation d'une démarche de modélisation accessible et économique pour des élèves en Collège passe par la bonne manipulation d'un vocabulaire spécifique comme celui d'issue, d'effectifs ou de fréquence. Notons ici la connexion de cette activité avec les programmes d'enseignement de la statistique pour les classes de 5^e et 4^e (analyse et gestion de données, B.O. hors-série 1998).
- Le langage est un outil nécessaire pour identifier des propriétés caractéristiques à retenir pour la modélisation de la situation aléatoire, et donc le moyen de délimiter le domaine de fonctionnement attaché [31] au modèle en construction.
- Le choix des caractéristiques pertinentes à retenir pour la modélisation de la situation de la réalité suppose que le langage est un outil d'explicitation du domaine de fonctionnement attaché au modèle. Cela doit aboutir à l'explicitation du protocole expérimental qui permet la reproduction de l'expérience aléatoire en jeu.

Remarquons que ces activités sont le début du processus d'abstraction et de simplification de la réalité. Ce processus aboutit à la représentation d'une expérience aléatoire par un modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli en permettant sa reproduction.

HR_2 : le travail sur le domaine pseudo-concret rend accessible aux élèves au niveau du Collège la construction d'un *modèle théorique* d'une classe de situations aléatoires équivalentes du point de vue des probabilités de succès ou échec.

---

[30] Nous nous rapportons ici au langage dans le sens large du terme : expression orale, expression écrite en langue naturelle ou expression symbolique, au moyen de dessins, schémas ou formules mathématiques.
[31] Rappelons que, selon le paragraphe 3.1. du Chapitre I, le domaine de fonctionnement dépend des objets et relations qui appartiennent au domaine de la réalité, et qui sont retenus pour être interprétés par le modèle en construction.

Ce modèle étant un représentant abstrait et simplifié de toutes ces situations de la réalité ayant la configuration d'une expérience de Bernoulli, rend plus économique la résolution de problèmes de reproduction et d'évaluation d'une probabilité.

§2. Le choix de la méthode : l'ingénierie didactique

Dans la mesure où les recherches didactiques sur l'aléatoire, publiées à ce jour, n'ont pas concerné les processus de modélisation faisant appel au domaine pseudo-concret, nous avons été conduits à construire nous-mêmes une expérimentation mettant en jeu ce domaine. La méthode de validation des hypothèses de recherche mentionnées plus haut relève de l'ingénierie didactique. Il s'agit d'une validation interne telle que décrite par M. Artigue :

> D'après M. Artigue (1988), une ingénierie didactique présente quelques caractéristiques générales. Parmi celles qui sont exposées dans cet article, nous soulignons deux points qui nous semblent essentiels dans notre progression :
>
> > *L'ingénierie didactique, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des "réalisations didactiques" en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. (...) Le paradigme de l'ingénierie s'y situe dans les registres des études de cas et dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori.* (Artigue, 1988, pp. 247-248).

§2.1. Les parties constitutives de notre ingénierie didactique

Notre ingénierie comporte trois parties, et nous associons des situations didactiques à chacune de ces parties, ***chaque situation étant un ensemble de tâches avec un objectif précis*** **: introduire les connaissances et les savoir-faire qui permettront l'évolution de l'élève dans l'activité qui suit lors de la mise en place de l'ingénierie**. D'un point de vue didactique, ce type d'organisation a pour objectif d'installer, *au fur et à mesure du déroulement des activités*, les notions probabilistes nécessaires à la réalisation de la démarche de modélisation visée. Ainsi, pour arriver à la réponse demandée dans la tâche principale, « *donner la composition d'une urne de Bernoulli qui représente la situation aléatoire X* », l'élève doit avoir résolu les sous-tâches précédentes. Citons, par exemple :

- ✓ « observer et décrire en langage courant ». Par exemple, « on choisit deux chaussettes au hasard dans un tiroir plain de chaussettes mélangées pour regarder si elles sont de la même couleur » est une description utilisant le langage courant ;
- ✓ « transformer la description en protocole expérimental ». Par exemple, « choisir deux

chaussettes au hasard dans le tiroir de chaussettes ; regarder les couleurs des chaussettes choisies » est une sorte de « règle du jeu » pour le choix d'une paire de chaussettes ;

- ✓ « donner les critères de classement des résultats possibles de l'expérience de la réalité en termes de succès ou échec ». Pour le choix d'une paire de chaussettes, on aura un succès si les deux chaussettes choisies sont de même couleur ; sinon on dira qu'il aura un échec.

Notons que les élèves peuvent établir, eux-mêmes, les critères pour définir le succès de l'expérience qu'ils sont en train d'observer et de décrire : les chaussettes de même couleur, les chaussettes effectivement du même pair, ou encore un autre critère choisi de façon arbitraire, selon l'objectif qu'ils fixent pour l'expérience.

Nous avons choisi de présenter une diversité de contextes pour les situations aléatoires qui constituent cette ingénierie. Ce choix est dû à l'accent mis sur l'activité de modélisation dans la séquence. En effet, la modélisation se justifie plus facilement dans le cas d'une pluralité de contextes en jeu. De plus, d'après Coutinho et al. (1996), les élèves au niveau du Collège ont tendance à n'associer l'aléatoire qu'au contexte des jeux de hasard réservant à la contingence le reste de leur appréhension du hasard (cf. Chapitre I). C'est pourquoi nous commençons les activités de l'ingénierie par le travail sur une situation de la vie courante. Seulement après l'installation de la notion de modèle d'urne de Bernoulli, nous proposerons une activité dans un contexte de jeu de hasard se plaçant dans un cadre géométrique. Nous avons fait alors le choix, en début de séquence, de favoriser la perception du lien entre les mathématiques et les situations de la vie quotidienne.

Nous voulons aussi montrer aux élèves la possibilité d'associer une certaine catégorie de situations de la réalité à un tirage *au hasard* encore plus simple que celui du Loto, conforme la délimitation du champ de problèmes que nous avons présenté au Chapitre I. Il nous faut ainsi établir une expérience étalon à utiliser tout au long de la séquence didactique. Le modèle envisagé est le modèle d'urne de Bernoulli. En conséquence, nous avons choisi comme expérience de référence un tirage *au hasard* dans un pot qui contient un nombre bien déterminé de perles rouges et de perles bleues, ne donnant que deux résultats possibles, « succès » ou « échec ».

La démarche expérimentale est introduite afin de mettre en évidence la dualité des approches de la notion de probabilité, mise en évidence au Chapitre I. Cette introduction est faite lorsque les élèves doivent proposer une composition d'une urne de Bernoulli modélisant une situation de la réalité ou issue d'un tirage au hasard dans une population. Autrement dit, nous cherchons à donner aux élèves des éléments pour qu'ils puissent choisir entre une méthode expérimentale pour obtenir une fréquence de succès, ou un calcul a priori fondé sur une interprétation géométrique de la probabilité. Ainsi, nous proposons aussi aux élèves des activités de jeux de hasard dans un cadre géométrique, dans lesquelles ils peuvent assimiler en acte les chances d'obtenir un succès soit à un rapport d'aires, soit à la fréquence de succès obtenue expérimentalement.

Dans cette ingénierie, le rôle de l'enseignant est décisif pour l'organisation, le déroulement et la gestion des activités d'enseignement. Entre autres, il organise les bilans et la mise en commun après chaque sous-tâche, il institutionnalise les notions et les savoir-faire apparus au sein des problèmes rencontrés, constitutifs de la résolution de la tâche principale. L'objectif est l'installation, dans la mesure du possible, des connaissances probabilistes minimales, communes à tous les élèves, lesquelles ils devront mobiliser lors de la résolution du problème proposé. Remarquons que ces connaissances ne sont pas nécessairement des notions mathématiques. Les élèves doivent acquérir et mobiliser aussi un grand nombre de notions paramathématiques ou protomathématiques, introduites par une définition formelle lors de l'institutionnalisation, ou encore par ostension. Citons la définition « d'expérience aléatoire », introduite par l'institutionnalisation lors de la première activité, et celle de « reproductibilité ». Cette dernière est attachée à une appréhension de hasard du type statistique, qui est introduit (ou induit) par ostension lors de la comparaison entre les divers exemples qui seront proposés par les élèves pendant le déroulement des activités.

Les trois situations didactiques qui composent notre ingénierie sont les suivantes :

- ✓ Situation A, que nous appelerons « ***Expérience de Bernoulli*** », composée par deux activités, A_1 et A_2.
- ✓ Situation B, que nous appelerons « ***Urne à Pixels*** », composée par deux activités, B_1 et B_2.
- ✓ Situation C, que nous appelerons « ***Jeu de Franc-Carreau*** », composée par deux activités, C_1 et C_2.

L'analyse théorique détaillée de ces situations est l'objet des Chapitres IV, V et VI. L'ensemble des fiches contenant les consignes données aux élèves font parties des annexes de cette thèse.

§2.1.1. Situation A : « *Expérience de Bernoulli*»

La première partie proposée dans notre ingénierie, que nous appelons « Expérience de Bernoulli », présente le processus de modélisation qui d'une situation aléatoire observée conduira l'élève au modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli. Elle est organisée en deux activités qui s'enchaînent selon une progression, mettant l'accent sur l'observation et la description d'une situation aléatoire de la réalité puis une familiarisation avec des tirages au hasard dans une population.

Conformément à notre hypothèse de travail HT_1, selon laquelle les élèves ont déjà eu des contacts avec des situations aléatoires en dehors de leur vie scolaire, L'activité A_1 utilise un contexte de la réalité :

- *On demande aux élèves de donner deux exemples de situations qu'ils pensent aléatoires ;*
- *On demande aux élèves d'observer dans un premier temps les couleurs des voitures sortant d'un parking. Puis, dans un deuxième temps, observer la répartition entre garçons et filles à la sortie du collège à la fin des cours.*

L'objectif est ainsi de représenter une situation aléatoire appartenant à un tel contexte par une urne de Bernoulli, en partant de l'observation et de la description de cette situation pour entamer le processus de modélisation, conformément à notre hypothèse de recherche HR_1.

L'usage d'une expérience de référence (activité A_2) est en rapport avec notre hypothèse de recherche HR_2 :

- *On demande aux élèves de réaliser un tirage au hasard dans un pot de perles comme base pour le processus d'abstraction vers la modélisation ;*
- *On demande aux élèves d'analyser l'expérience « sortie du collège » à l'aide de l'expérience avec le pot de perles ;*
- *On demande aux élèves de donner une composition de l'urne de Bernoulli qui peut modéliser l'expérience « sortie du collège ».*

L'activité offre à l'élève non seulement le vocabulaire pour un travail dans le domaine pseudo-concret, mais surtout, les objets du domaine de la réalité qui seront à la base de la construction du modèle d'urne de Bernoulli.

À partir des situations abordées par les activités A_1 et A_2 on dégagera la notion « *d'expérience aléatoire* » comme une expérience où le hasard intervient et où, par principe, les conditions de sa production sont supposées reproductibles. Dans la suite, on dégage la notion « *d'issue* » d'une expérience aléatoire comme une catégorie de résultats de cette expérience : ceux que nous désirons distinguer, caractérisant un événement attendu.

La notion de « *chance d'obtenir un succès* » met en œuvre la pré-probabilité, définie au paragraphe 4.3 du Chapitre II : la prise en compte du hasard lors de la référence à la proportion qui caractérise la composition d'une urne de Bernoulli.

Nous limitons les situations aléatoires à modéliser aux situations de Bernoulli et la modélisation de ces situations reste dans le domaine pseudo-concret. En conséquence, l'élève peut utiliser les désignations « *succès* » et « *échec* » pour nommer, à la fois, les résultats des expérimentations réelles et les issues possibles d'une expérience aléatoire appartenant au domaine pseudo-concret.

La mise en évidence de la fluctuation d'échantillonnage comme une conséquence de l'intervention du hasard dans le déroulement des situations expérimentales observées est aussi envisagée par les activités qui composent cette première situation didactique.

La progression des activités A_1 et A_2 est présentée dans le schéma suivant :

Situation A :
« Expérience de Bernoulli »

Activité A_1 : l'aléatoire dans la réalité.

Activité A_2 : l'urne de Bernoulli.

Par rapport aux objectifs

- Mettre en place un vocabulaire au moyen de la négociation d'un nouveau contrat didactique ;
- Mettre en œuvre un processus d'abstraction au moyen d'un dialogue entre les élèves ainsi qu'avec l'enseignant.

- Introduire le tirage au hasard dans un pot de perles comme expérience de référence (ER) ;
- Mettre en place les éléments de la situation aléatoire en jeu pour en dégager un modèle ;
- Mettre en évidence l'insuffisance d'un petit nombre d'observations pour pouvoir donner de manière unique la composition d'une urne de Bernoulli modélisant la situation en jeu.

Par rapport aux tâches

Phase individuelle :
- Formuler, par écrit, deux exemples de situations qu'ils (les élèves) pensent aléatoires. Un des exemples ne doit pas être un jeu de hasard.

Phase collective :
- Décrire, oralement, une situation de la réalité observée, « *la sortie du parking d'une grande surface* » et «*la sortie du Collège Plan Menu* », afin de permettre la reproduction des conditions d'observation par une tierce personne ;
- Rédiger un protocole expérimental en transformant la description faite à l'oral en langage écrit.

Phase collective :
- Réaliser l'expérience ER à partir d'un protocole expérimental donné ;
- Analyser l'observation faite pour l'expérience «*sortie du collège* » à l'aide de l'expérience ER afin d'établir leurs similarités ;
- Donner la composition d'une urne de Bernoulli qui représente l'expérience « *sortie du collège* » à partir de la comparaison entre les divers résultats expérimentaux obtenus par l'ensemble des élèves de la classe.

Schéma 10

§2.1.2. Situation B : « *Urne à Pixels* »

La deuxième situation didactique qui compose notre ingénierie, que nous nommons « Urne à Pixels », est mise en place dans un contexte géométrique. Les activités se placent alors dans le cadre des probabilités géométriques dont les problèmes sont proposés dans un environnement informatique. La constitution de cet environnement est développée au paragraphe §3 de ce chapitre.

La situation didactique « Urne à Pixels » est construite à partir de l'enchaînement de deux activités B_1 et B_2 que nous présenterons dans la suite. Ces activités constituent un réinvestissement de notions et du vocabulaire introduits par la situation didactique précédente, « Expérience de Bernoulli ». Ainsi, la notion d'*expérience aléatoire*, liée à son protocole expérimental et à la liste des issues possibles, ainsi que la notion d'*urne de Bernoulli* constituent les prés-requis pour les activités qui suivent. Les connaissances de l'élève sur la proportionnalité vont aussi intervenir lors de la recherche de solution pour les tâches proposées, conformément à notre hypothèse de travail HT_2.

L'activité B_1 propose aux élèves la discrétisation d'une région délimitée à l'écran, au moyen d'une interprétation didactique de pixel (conformément au paragraphe §3, dans la suite de ce chapitre).

- *Nous proposons aux élèves la définition suivante d'un pixel : un petit carré unitaire qui tapisse la figure à l'écran. On leur demande de dégager les proportionnalités en jeu dans les rectangles représentés par les Cabri-dessins ABCD et AEFD. Dans ce but, on leur propose des comparaisons successives entre longueurs, aires et nombre de pixels qui recouvrent chacun de ces rectangles.*

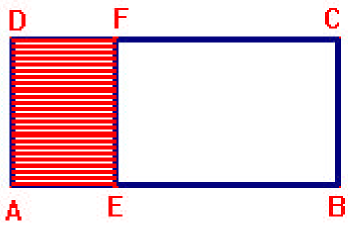


Figure 2

L'objectif de cette activité est de préparer la compréhension du lien entre probabilité géométrique [32] et probabilité définie a priori par le premier principe de Laplace, énoncé au paragraphe 2.5 du Chapitre I : *le rapport entre le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité et le nombre de cas possibles*. Ce lien est une conséquence de la discrétisation proposée et il prend du sens chez l'élève par l'association-en-acte entre les pixels qui tapissent la figure et les boules dans l'urne modélisant l'expérience aléatoire en jeu.

La deuxième activité B_2 introduit le dispositif « *urne à pixels* » comme un moyen informatique qui peut simuler notre expérience de référence ER (tirage "au hasard" d'une perle dans un pot rempli de perles bleues et rouges). Elle introduit aussi l'expérience aléatoire

---

[32] Nous limitons le sens de la probabilité géométrique à son niveau le plus simple, celui d'un rapport d'aires, bien qu'en général cette probabilité géométrique est, selon la situation, interprétée en termes de rapport entre deux mesures de même magnitude. Par exemple, le rapport de longueurs, de volumes, d'angles, etc.

« *choisir un pixel* $\tilde{A}$ *“au hasard” dans le rectangle ABCD* », le succès étant « $\tilde{A}$ *tombe dans le rectangle AEFD* ». Cette désignation du succès de l’expérience aléatoire est en association avec l’événement « *la perle choisie est rouge* » lors de la mise en fonctionnement de l’expérience ER. L’objectif de l’association entre ER et l’expérience « *choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD* » est de donner à celle-ci le statut d’expérience de référence lorsque le problème de modéliser une situation aléatoire est présenté dans un environnement informatique. Ainsi, pour la suite de ce travail, nous la désignerons par ER^i.

L’activité B_2 propose aux élèves la mise en fonctionnement du dispositif informatique « *urne à pixels* » afin de mettre en œuvre la démarche expérimentale pour la modélisation de l’expérience aléatoire par une urne de Bernoulli :

- *On demande aux élèves de réaliser un grand nombre de répétitions de l’expérience* ER^i *d’abord au moyen d’une macro-construction donnée pour, ensuite, utiliser l’animation sur un compteur introduit dans le Cabri-dessin fourni à l’écran* [(33)].
- *On demande aux élèves de donner la composition d’une urne de Bernoulli qui modélise l’expérience aléatoire* ER^i.

L’activité B_2 permet, par la mise en œuvre du dispositif informatique «*urne à pixels* », la coexistence entre les deux approches de la notion de probabilité, mises en évidence au paragraphe 2.6 du Chapitre I: l’approche laplacienne et l’approche fréquentiste. La première est mise en œuvre lorsque l’élève travaille dans un cadre géométrique, en faisant le rapport entre l’aire du rectangle AEFD et celle du rectangle ABCD. La deuxième est mise en œuvre lorsque l’élève observe la fréquence des succès obtenus expérimentalement, par la réalisation d’un très grand nombre d’essais de l’expérience grâce aux performances de l’environnement informatique.

Dans un tel environnement, le fonctionnement du dispositif informatique place les élèves devant un effet « boîte noire » : il voit la simulation à l’écran, et il doit étudier son déroulement et ses résultats afin de dégager le modèle « caché ». Il y a ainsi une association explicite entre le modèle et l’expérience simulé au sein de ce modèle.

[(33)] La macro-construction et l’animation du compteur utilisées dans cette activité seront explicitées au paragraphe 3 de ce chapitre.

Le schéma ci-dessous illustre l'enchaînement des activités qui constituent cette situation B :

Situation B : Urne à Pixels

Activité B_1 : discrétisation d'une région délimitée à l'écran. → Activité B_2 : Urne à Pixels.

Par rapport aux objectifs

- Introduire le pixel, d'un point de vue didactique, comme un outil de discrétisation d'une région délimitée à l'écran.
- Introduire la notion de probabilité géométrique, conçue comme un rapport d'aires.
- Préparer la compréhension du lien entre probabilité géométrique et probabilité laplacienne.

- Introduire la notion de simulation d'une expérience aléatoire dans un environnement informatique.
- Rendre le dispositif informatique « urne à pixels » fiable pour les activités qui suivent par la comparaison entre la valeur d'une probabilité géométrique et la fréquence de succès obtenue expérimentalement par ce dispositif.

Par rapport aux tâches

- Mettre en rapport les aires des rectangles ABCD et AEFD avec les nombres de pixels que les tapissent.

→

- Donner la composition d'une urne de Bernoulli qui représente l'expérience « *choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD* », le succès étant « *le pixel est dans le rectangle AEFD* ».

Schéma 11

§2.1.3. Situation C : « *Franc-Carreau* »

La situation C, « Franc-Carreau », a pour objectif d'amener les élèves à mobiliser des notions introduites par les deux situations précédentes afin de résoudre le problème posé : la modélisation du jeu de franc-carreau par une urne de Bernoulli. ***Les deux activités C_1 et C_2 qui composent cette troisième situation didactique mettent ainsi en œuvre la démarche de modélisation introduite par les situations A et B, que nous venons de présenter.***

L'activité C_1 propose aux élèves une représentation informatique du jeu de Franc-Carreau, présenté au paragraphe §2.3 du Chapitre I. Cette activité met en œuvre le changement d'environnements : le jeu est d'abord proposé par le jet effectif d'une pièce sur un carrelage. Ensuite on propose sa présentation informatique, qui consiste à représenter à l'écran seulement le carreau dans lequel se situe le centre de la pièce après immobilisation.

- *Nous proposons aux élèves de donner la composition d'une urne de Bernoulli qui modélise le jeu de Franc-Carreau.*

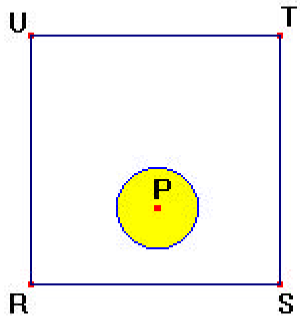


Figure 3

Lors de la proposition de l'activité, les mesures associées au Cabri-dessin ne sont pas disponibles aux élèves. Dans un deuxième temps, ces mesures sont affichées à l'écran, ainsi que le compteur N. L'objectif est de laisser à la charge de l'élève le choix de la méthode à utiliser pour donner la composition de l'urne de Bernoulli cherchée et pour contrôler le résultat proposé. Autrement dit, c'est à l'élève de prendre la décision d'utiliser la méthode expérimentale par l'analyse des fréquences ou la méthode du calcul a priori du rapport d'aires, soit pour donner une composition de l'urne de Bernoulli soit pour la contrôler. Cette possibilité rend fiable ce dispositif informatique auprès des élèves pour l'activité C_2 car elle rend explicite l'adéquation entre l'interprétation géométrique de la probabilité dans le cas où elle est accessible, et la fréquence stabilisée, obtenue par une approximation expérimentale. Nous y reviendrons dans le chapitre V, lors de l'analyse a priori de cette activité.

L'activité C_2 complète les objectifs de l'ingénierie didactique par la mise en place d'une modélisation qui n'est possible que par l'utilisation de la méthode expérimentale. Dans cette activité, on remplace le disque du jeu de Franc-Carreau par un triangle équilatéral. Ce triangle présente, à l'écran, un positionnement associé à un choix aléatoire de son centre et une rotation, elle-même aléatoire, autour de son centre. Cette rotation rend inaccessible une résolution par rapport d'aires, il ne restant aux élèves que la méthode expérimentale pour donner une composition approximative de l'urne de Bernoulli qui modélise ce jeu.

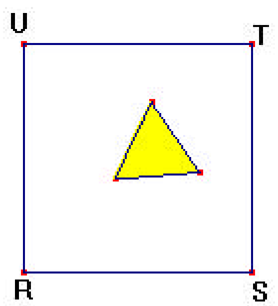


Figure 4

- *Nous proposons aux élèves de donner la composition d'une urne de Bernoulli qui modélise le jeu du triangle.*
- *Nous proposons aux élèves de choisir le jeu pour lequel ils pensent qu'ils auront plus de chances d'obtenir la position « franc-carreau » : le jeu avec le disque ou le jeu du triangle.*

Pour que la comparaison soit faite au moyen de l'analyse des urnes de Bernoulli qui représentent chacun de ces jeux, les dimensions des Cabri-dessins pour chacun d'entre eux sont distinctes et non-proportionnelles. La simple comparaison entre les dimensions des carrés, des disques ou des triangles ne résout pas le problème posé. Il faut que l'élève passe par la composition de chacune des urnes de Bernoulli pour pouvoir trancher entre les deux jeux. **Dans le cas du jeu du triangle, seule l'expérimentation fréquentiste, validée par les activités précédentes, lui permet de suivre une telle démarche** : l'élève doit estimer la composition de l'urne de Bernoulli par l'analyse des fréquences obtenues expérimentalement.

Le schéma ci-dessous présente les objectifs et les tâches proposées pour chacune des activités qui composent la situation didactique C :

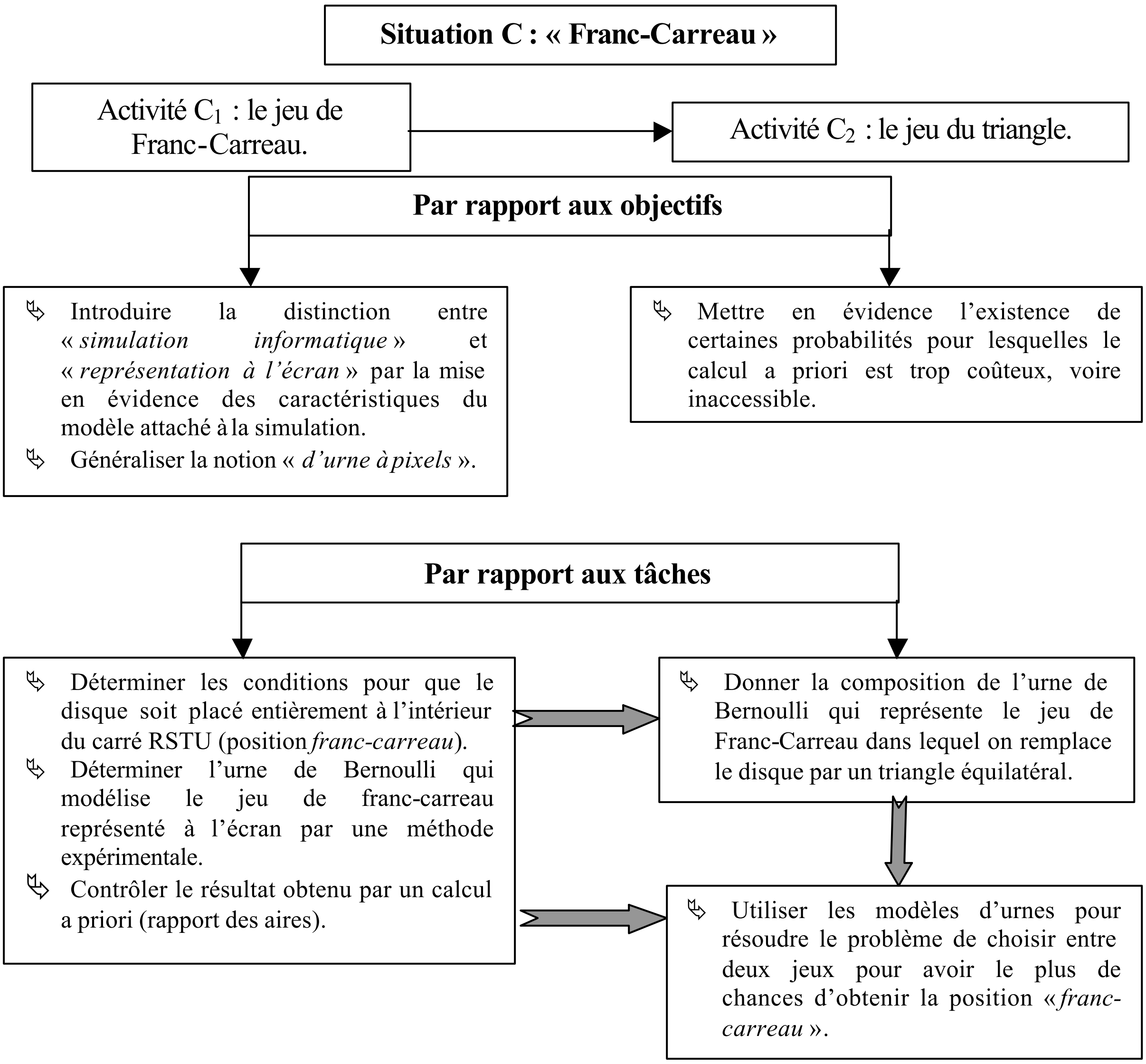


Schéma 12

§2.2. Le lien entre la problématique et les activités composantes de l'ingénierie didactique

Revenons, dans ce début de paragraphe, à la question principale de cette recherche : **Dans quelles conditions didactiques les élèves peuvent-ils se familiariser avec des situations aléatoires en contexte scolaire et s'engager dans une appréhension en termes de modèle de telles situations dès le Collège ?**

Nous proposons ainsi la situation A, « Expérience de Bernoulli », mettant l'accent sur la familiarisation avec le hasard par la description de situations aléatoires de la réalité. Cette situation sert ainsi à installer chez les élèves la notion d'expérience de référence du pot de perles et la notion de modèle d'urne de Bernoulli.

La deuxième situation proposée, « Urne à Pixels », sert à introduire les expériences aléatoires réalisées dans un environnement informatique. L'urne à pixels est introduite comme un lien avec l'expérience de référence dans un tel environnement. En conséquence, elle dévient outil de simulation d'un tirage *au hasard* dans un pot de perles, l'expérience de référence mise en place par la situation A, « Expérience de Bernoulli ». Mais l'urne à pixels est, surtout, un élément dans le processus de conceptualisation de la notion de modèle d'urne de Bernoulli, introduit aussi par la situation A, par le lien entre la probabilité géométrique et la probabilité laplacienne.

L'ensemble des activités qui composent les deux situations décrites, A et B, introduit dans le milieu les connaissances et les savoirs-faire nécessaires à la résolution d'un problème probabiliste dans le cadre des probabilités géométriques. Ainsi, lors de la dernière situation, « Franc-Carreau », les élèves doivent mobiliser ces connaissances et savoirs-faire afin de résoudre localement le problème proposé par cette situation didactique. Ainsi, par la mise en place de la séquence didactique décrite, nous voulons aboutir à l'installation de la double démarche d'expérimentation et de modélisation, en vérifiant notre Hypothèse Principale de Recherche (HRP), présentée au paragraphe §1 de ce chapitre.

§3. La constitution de l'environnement informatique

Dans ce paragraphe, nous présentons de façon précise les choix, soit méthodologiques soit didactiques, nécessaires pour rendre opératoire la mise en œuvre de notre ingénierie. Nous parlons ici d'un niveau macro-didactique, au sens de Artigue (1998) : l'ensemble des choix qui sont en rapport avec la globalité de l'ingénierie. Autrement dit, ce sont les choix qui guident et qui rendent opératoire et cohérent l'ensemble d'activités qui constituent les situations didactiques proposées par cette ingénierie. Cette partie explicitera davantage la constitution de l'environnement informatique dans lequel les activités seront présentées et mises en fonctionnement.

Nous nous posons alors la question : **quelles caractéristiques opératoires doit avoir un environnement informatique constitué pour représenter ou simuler des expériences aléatoires, de façon à placer les élèves en position d'acteurs, intervenant directement sur chaque paramètre de cette simulation, de façon à pouvoir contrôler leurs effets ?**

§3.1. Les choix macro-didactiques pour la constitution de l'ingénierie didactique.

Les choix méthodologiques que nous avons faits pour la constitution d'un environnement informatique pour la simulation et la représentation d'expériences aléatoires sont fondés sur deux facteurs :

- ✓ La pluralité des choix de stratégies pour la résolution du problème posé, ainsi que pour le contrôle de cette résolution proposée, que nous pouvons laisser à la charge des élèves grâce aux caractéristiques constitutives de l'environnement.
- ✓ La possibilité de représenter visuellement le problème (construction d'une réalité spatio-graphique [(34)], au sens de Capponi & Laborde, 1995). La nécessité d'associer directement les résultats possibles d'une expérience aléatoire à des nombres aléatoires [(35)] nous paraît supposer un saut épistémologique trop important pour la démarche de modélisation que nous souhaitons installer.

L'importance de ce deuxième point est mise en évidence par Shaugnessy & Batanero (1995) dans l'extrait suivant :

> *Dans le cadre des probabilités et statistiques, la représentation visuelle des données et des expériences probabilistes peut donner aux élèves d'autres moyens de représentation des concepts probabilistes. L'enseignement de ces concepts, dans le passé, était plutôt fondé sur*

[(34)] Réalités spatio-graphiques : extériorisation, dans des systèmes de signifiants divers, des objets et relations géométriques qui sont de nature théorique. Citons par exemple les images produites par des électrons sur l'écran de l'ordinateur. (Capponi & Laborde, 1995, p. 265).

[(35)] Obtenus par exemple par l'utilisation de la touche «random» d'une calculatrice ou pour une table de nombres aléatoires.

une approche excessivement centrée sur des formulations théoriques.
(Shaughnessy & Batanero, 1995, p. 105) [(36)].

Nous ajoutons à cette idée le rôle du domaine pseudo-concret, qui est primordial dans l'interprétation des images offertes par la visualisation des expériences aléatoires en environnement de géométrie dynamique. **Les élèves peuvent, dans un tel environnement, simplifier et choisir les éléments pertinents pour la modélisation, en gardant les désignations utilisées brs de l'expérimentation concrète réalisée à l'écran. Ils peuvent décrire en termes de la réalité ce qui est visualisé à l'écran, mais ils peuvent aussi agir sur ces images en les modifiant selon leur besoin.**

Ainsi, plusieurs raisons nous conduisent à l'utilisation de l'environnement informatique de géométrie dynamique :

- ✓ Il offre aux élèves la possibilité de représenter visuellement des expériences aléatoires et de les réaliser un très grand nombre de fois de façon très rapide.
- ✓ Il offre aux élèves la possibilité de donner du sens à la fluctuation d'échantillonnage et à la stabilisation des fréquences : les élèves peuvent résoudre les problèmes qui découlent de la fluctuation d'échantillonnage par la stabilisation des fréquences obtenues expérimentalement.
- ✓ Il offre aux élèves la possibilité de visualiser et de manipuler à leur guise les éléments qui composent l'expérience aléatoire en jeu. En conséquence, la mise en place, par les élèves, d'un raisonnement probabiliste est plus naturelle et autonome.

Remarquons aussi que l'usage de l'environnement informatique offre une deuxième réification de l'urne de Bernoulli, par le dispositif « urne à pixels », dans lequel l'ordinateur est le pseudo-générateur de hasard. La première possibilité de réification était l'usage du pot de perles, pour lequel l'élève génère lui-même le hasard par la manipulation du pot.

Nous présentons, dans les sous-paragraphes qui suivent, chaque étape de la constitution d'un tel environnement, que nous utilisons dans notre ingénierie didactique.

§3.1.1. Géométrie Dynamique et micromonde Cabri II

D'après Bernat (1997), un logiciel de géométrie dynamique est un environnement qui apporte

[(36)] *"En el área de la probabilidad y estadística, la representación visual de los datos y los modelos visuales de experimentos probabilísticos pueden dar a los alumnos y alumnas una forma alternativa de representar los conceptos estocásticos que, en el pasado, se enseñaban con un enfoque excesivo en la formulación."*

en général aux figures géométriques les dimensions du mouvement, de l'animation interactive et du dessin. Autrement dit, dans un tel environnement, on peut créer des représentations dynamiques d'un objet théorique et agir sur ces représentations (les réalités spatio-graphiques que l'on peut produire), en conservant les contraintes géométriques de construction :

> *Ces dessins à l'écran de l'ordinateur peuvent être saisis par l'un de leurs éléments que l'on déplace à l'aide de la souris, le dessin se déforme alors en conservant les propriétés géométriques qui ont servi à le construire et celles qui en découlent dans une géométrie "grosso modo" euclidienne.* (Capponi & Laborde, 1995, p. 265).

Dans le même article, Capponi et Laborde définissent la notion de « *micromonde* » :

> *Un micromonde est une création d'un monde de réalités artificielles fournissant un modèle (au sens des logiciens) d'une théorie. Ce monde comporte des objets sur lesquels on peut agir grâce à des actions, on peut aussi créer de nouveaux objets. Une fois crées, les objets ont un comportement régulé par la théorie sous jacente au modèle. Même si l'utilisateur du micromonde peut agir sur ces objets, ces derniers présentent donc une certaine autonomie, de la même manière qu'on ne peut faire n'importe quoi avec un objet matériel.* (Capponi & Laborde, 1995, p. 265).

Revenons alors à l'objectif de ce paragraphe : **expliciter la construction du dispositif informatique, au sens de Balacheff (1994a)[37], et la transposition informatique qui en découle.**

Du fait que nous envisageons de représenter et de simuler une expérience aléatoire en utilisant Cabri II, nous nous éloignons de l'usage habituel de ce logiciel. Cela nous conduit à expliciter les fonctionnalités et les « Cabri-outils » disponibles pour cet usage. Nous proposons d'abord l'introduction de quelques termes selon le lexique de Cabri II, extrait du guide de l'utilisateur de ce logiciel.

> Objet : ce peut être un objet géométrique, un objet numérique, un texte ou une table.
> Figure : c'est un ensemble d'objets (géométriques, numériques, textuels, …) liés par des relations.
> Dessin : c'est une instance de la figure.

---

[37] Dispositif informatique : « *le complexe formé par les matériels et les logiciels qui rendent opératoire l'ordinateur.* » (Balacheff, 1994a, p. 11).

Point libre : c'est un point indépendant dans la figure. Si l'on modifie la position d'un point libre à l'écran, l'on ne modifie ni les objets, ni leurs relations. En conséquence, la figure n'est pas modifiée, mais seulement le dessin.

Outil : c'est un mode d'action sur les objets de Cabri II. Chaque outil est localisé dans une « boîte à outils », et est représenté dans la barre d'outils.

Comme l'utilisation envisagée du logiciel ne porte pas spécifiquement sur des constructions géométriques, nous limiterons la présentation des fonctionnalités à celles qui sont liées à nos objectifs. Nous voulons rendre possible la simulation de l'expérience aléatoire : « *réaliser un tirage "au hasard" d'un pixel dans une région délimitée de l'écran* ». L'intérêt d'un environnement de géométrie dynamique réside dans la possibilité de modifier simplement et à volonté les dimensions et la forme de la région du plan dans laquelle s'effectue le tirage. Autrement dit, dans un tel environnement, les élèves peuvent changer non seulement l'échelle du dessin à l'écran, mais aussi changer la figure référente.

Ces possibilités de faire varier les paramètres de la simulation par l'utilisateur même nous paraissent très importantes pour que les élèves ne soient pas réduits à observer passivement une simulation. Bien au contraire, nous cherchons à leur proposer des tâches dans lesquelles il leur appartient de décider des paramètres de la simulation. Nous revenons sur ce sujet plus loin, dans ce chapitre.

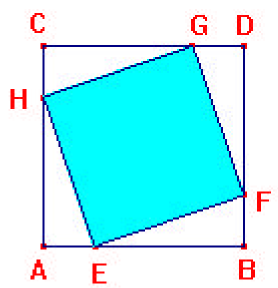


Figure 5

Prenons un exemple. Supposons que le problème consiste à choisir *au hasard* un pixel dans le carré ABCD ci-contre, et à évaluer les chances que ce pixel appartienne au carré EFGH, inscrit dans ABCD. Nous pouvons aussi demander aux élèves de mettre en relation *la longueur du segment [AE]* lorsque le point E se déplace sur [AB] et *les chances d'obtenir un succès*, c'est-à-dire que le pixel soit dans le carré EFGH.

Le micromonde Cabri de géométrie dynamique permet deux types de manipulations différentes :

- ✓ L'affichage du rapport des aires des carrés ABCD et EFGH, et l'observation de l'effet du déplacement du point E sur ce rapport.
- ✓ Le tirage au hasard d'un pixel dans le carré ABCD un grand nombre de fois et l'observation des fréquences de succès ainsi obtenues.

Ces deux types de manipulation peuvent chacun être soit la source de conjectures, soit la validation pragmatique d'une conjecture élaborée : le tirage *au hasard* peut servir à valider une conjecture issue de l'observation du rapport des aires ou, inversement, l'affichage du rapport des aires peut contrôler les résultats du tirage *au hasard*.

Les sous-paragraphes qui suivent explicitent les Cabri-outils qui permettent la mise en œuvre des deux types de manipulation décrites ci-dessus.

§3.1.2. Le changement de la figure par la manipulation d'un point libre

Prenons l'exemple d'un rectangle, en partant de sa construction afin de bien identifier les points libres de la figure à l'écran.

Dans la barre d'outils de Cabri II, sélectionner l'outil « droite ».

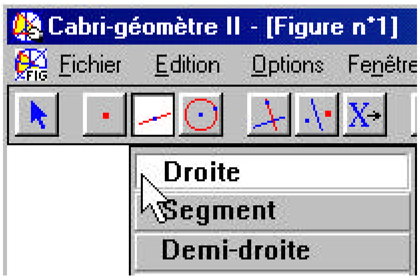
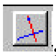


Figure 6

Cet outil permet de tracer une droite (r) à partir d'un point, nommé « A », et d'une direction montrée par le pointeur à l'aide de la souris. Plaçons le point B sur l'objet « droite (r) » : B est alors un point libre mobile sur la droite (r).

Ensuite, l'utilisation de l'outil « droite perpendiculaire », identifié dans le menu soit par l'icône , soit par le déroulement du bouton qui désigne cette boîte à outils, permet de construire la droite (s), perpendiculaire à (r) passant par le point A. Par la même procédure, nous construisons la droite (u), perpendiculaire à (r) passant par le point B. Plaçons le point D sur la droite (s) : ainsi que le point B, le point D est un point libre mobile sur cette droite.

En utilisant encore une fois l'outil « droite perpendiculaire », construisons la droite (t), perpendiculaire à (s) passant par le point D. Le point C est crée à l'intersection des droites (t) et (u). Ce point C n'est pas alors un point libre, car il est complètement déterminé par ces deux droites.

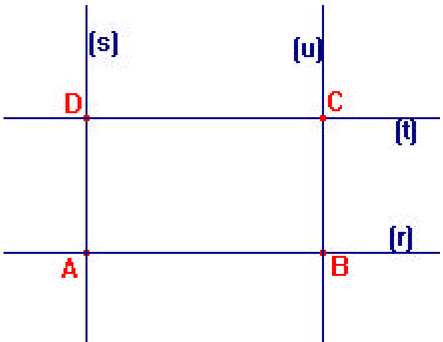


Figure 7

Cela veut dire que nous pouvons modifier les longueurs de [AB] et [DC] en modifiant la position du point B sur la droite (r). Du même, nous pouvons modifier les longueurs de [AD] et [BC] en modifiant la position du point D sur la droite (s). Le point A, objet primitif de la construction réalisée, permet le déplacement du dessin dans la fenêtre active de Cabri.

Dans la manipulation que nous envisageons, les élèves peuvent alors identifier les points libres de la figure proposée pour la simulation afin de changer les dimensions de la figure, et ainsi, changer les paramètres de cette simulation.

Remarquons encore une fois que, lorsque nous parlons de changement de taille de la figure, nous ne nous limitons pas aux changements que les élèves peuvent faire sur l'échelle d'un Cabri-dessin. Nous renvoyons plutôt aux changements qui provoquent un changement de la forme de la figure référente, et donc, un changement de l'expérience aléatoire simulée. Nous parlons alors des modifications du type méréologiques, optiques ou positionnelles, qui peuvent être réalisées par les élèves lorsqu'ils ont une appréhension opératoire de la figure.

> D'après Duval (1994), il y a différents types d'appréhension d'une figure géométrique, selon la démarche de représentation d'une situation géométrique : l'appréhension perceptive, l'appréhension discursive, l'appréhension séquentielle et l'appréhension opératoire. Du fait que cette dernière a une fonction d'exploration heuristique, ce qui nous intéresse particulièrement à cause du processus de modélisation que nous voulons installer chez les élèves, nous présentons l'extrait dans lequel Duval explicite cette appréhension :
>
> > *L'appréhension opératoire est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures. Nous avons distingué ailleurs trois grands types de modification : les modifications méréologiques consistant dans le partage d'une figure en parties pour les recombiner en une autre figure ; les modifications optiques consistant dans l'agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure, et les modifications positionnelles consistant soit dans le déplacement de la figure dans le plan soit dans le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle. (...)* (Duval, 1994, p. 126).

Nous nous intéressons ainsi aux modifications effectuées par l'élève lorsqu'il entame un processus de résolution d'un problème d'estimation de la composition d'une urne de Bernoulli, posé dans un contexte géométrique, grâce à l'usage de Cabri-géomètre II.

Dans l'exemple présenté à la fin du paragraphe §3.1.1, le choix *au hasard* d'un pixel dans le carré ABCD, le point E est un point libre mobile sur le segment [AB]. Son déplacement sur ce segment modifie les dimensions du carré EFGH, en conservant les contraintes géométriques de sa construction, selon lesquelles EFGH reste toujours un carré, pour n'importe quelle position du point E sur [AB]. L'usage des outils « aire » et « calculatrice » permet l'affichage de l'aire de chacun des carrés ABCD et EFGH, ainsi que le calcul du rapport entre elles, calcul qui reste affiché à l'écran lors du déplacement du point E. La figure ci-dessous montre trois positions du point E et les changements de la valeur du rapport entre l'aire de ABCD et l'aire de EFGH dus aux changements de la figure formée par les deux carrés.

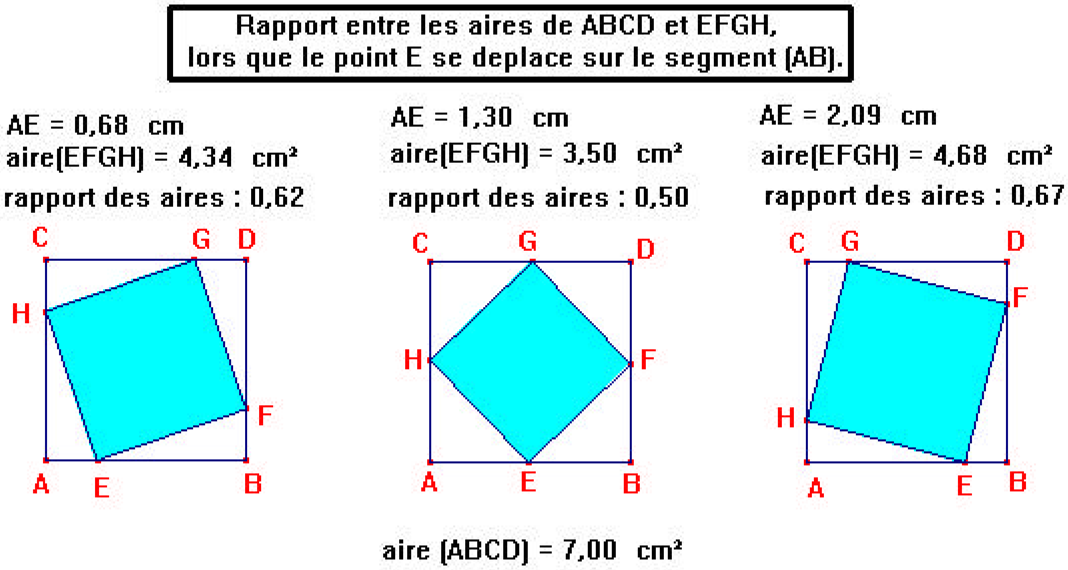


Figure 8

§3.1.3. Macro-construction produisant des objets aléatoires

Une macro-construction permet de créer un nouvel outil dans Cabri. En revenant à l'exemple du rectangle ABCD, supposons que nous voulons un point à l'intérieur de ce rectangle, dont les projections orthogonales appartiennent aux segments [AB] et [AD], respectivement. Un exemple de construction d'un tel point pourra être donné par la liste de consignes ci-dessous :

a) Placer un point X sur le segment [AB] et un point Y sur le segment [AD].

b) En activant l'outil « droite perpendiculaire », construire la perpendiculaire au segment [AB] qui passe par le point X, et la perpendiculaire au segment [AD] qui passe par le point Y.

c) Le point P cherché est à l'intersection des droites construites à l'item (b), ci-dessus.

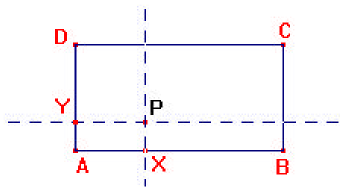


Figure 9

Nous pouvons obtenir le point P sans utiliser les constructions intermédiaires, décrites par les items (a) et (b) ci-dessus, grâce à la macro-construction suivante :

Figure 10

i) on active l'outil « objet(s) initiau(x) » et on désigne les segments [AB] et [AD].

ii) on active l'outil « objet(s) finau(x) » et on désigne le point P.

iii) on active l'outil «valider une macro ». une boîte de dialogue s'ouvre et nous pouvons alors nommer et enregistrer la macro-construction.

Ainsi, pour obtenir le point P, il suffira aux élèves de désigner la macro-construction dans la boîte à outils pour, ensuite, désigner les segments [AB] et [AD]. De par de ses spécifications, le logiciel crée lui-même deux points, X et Y, *au hasard*, sur [AB] et [AD] respectivement, ce qui permet ensuite de construire le point P. Nous pouvons formaliser cette situation de la façon suivante : considérons les longueurs AX et AY comme deux variables aléatoires prenant leurs valeurs sur [0 ; AB] et [0 ; AD], respectivement. Nous pouvons alors modéliser les lois de ces variables par des lois uniformes *continues* [38]. De plus, nous pouvons considérer que AX et AY sont indépendantes, car le logiciel réinitialise la randomisation à chaque tirage d'un nombre au hasard dans [0 ; 1]. **En conséquence, le point P, objet final de la macro-construction, est aléatoire dans le rectangle ABCD et le couple de ses coordonnées suit une loi uniforme sur le rectangle : loi produit de deux lois uniformes sur les segments [0 ; AB] et [0 ; AD], en raison de l'indépendance des variables AX et AY.**

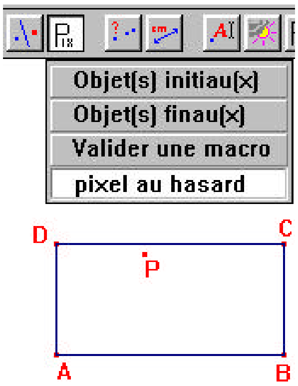


Figure 11

Dans la suite de notre travail, cette macro-construction sera nommée « ***Pix*** ».

Revenant à l'exemple sur le choix d'un pixel *au hasard* dans le carré ABCD, l'utilisation de la macro-construction « Pix » permet aux élèves la mise en place d'une démarche expérimentale afin d'observer les fréquences des succès ainsi obtenus. Cette démarche, qui évoque la méthode de Monte-carlo pour l'estimation d'une probabilité, pourra être la source de conjectures ou un moyen de validation pragmatique des conjectures déjà construites.

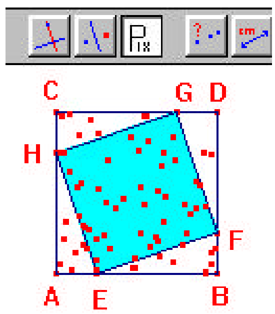


Figure 12

Les élèves peuvent alors construire ou valider leurs conjectures à partir de la visualisation des résultats, selon la figure ci-contre.

§3.1.4. L'animation d'un nombre

L'outil « animation » dans Cabri II permet de déplacer automatiquement un objet dans une direction donnée ou de faire croître ou décroître automatiquement des nombres. Nous nous

---

[38] Nous considérons ces lois comme "continues", même en sachant que les pixels discrétisent l'écran, et en conséquence, les figures représentées sur cet écran.

intéressons particulièrement à l'animation des nombres pour obtenir une liste croissante d'entiers consécutifs, qui nous servira de compteur lors de la simulation d'expériences aléatoires, comme nous l'indiquons plus loin dans ce chapitre.

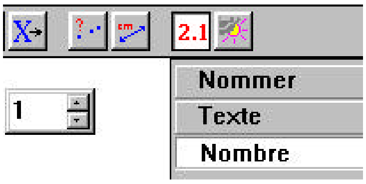


Figure 13

Explicitons la démarche pour réaliser l'animation d'un nombre. Il nous faut d'abord activer l'outil « nombre » dans le menu. Une boîte de dialogue s'ouvre et il nous suffit alors de taper un nombre quelconque au clavier. Du fait que nous envisageons un usage de ce nombre comme compteur, nous utiliserons le nombre « 1 ».

Ensuite, pour incrémenter ce nombre, il suffit d'activer l'outil « animation » dans le menu, de saisir le nombre en tirant vers le bas de l'écran le petit ressort qui apparaît. La direction vers laquelle on tire va déterminer la croissance ou la décroissance de ce nombre : tirer vers le bas de l'écran produit une liste croissante.

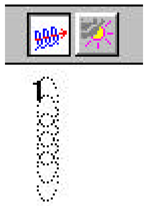


Figure 14

Cette liste peut être transcrite dans une Cabri-table, selon la procédure suivante :

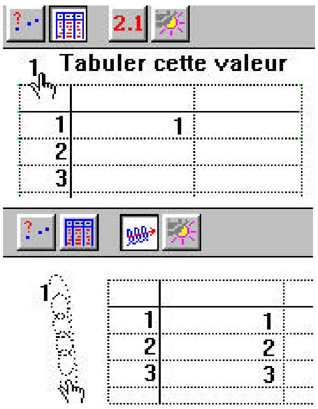


Figure 15

a) activer l'outil « table ».

b) glisser le pointeur pour définir la taille de la table.

c) cliquer sur le nombre pour l'inclure dans la table.

d) activer l'outil « animation ».

e) cliquer sur la table, saisir le nombre situé en dehors de la table en tirant vers le bas de l'écran. La table se remplit alors automatiquement par une suite croissante d'entiers.

Reprenons l'exemple développé tout au long de ce paragraphe, sur l'expérience aléatoire de choisir un pixel au hasard dans un carré ABCD afin d'évaluer les chances que ce pixel appartienne au carré EFGH, inscrit dans ABCD. Nous pouvons rendre la réalisation de cette expérience plus économique que l'usage de la macro-construction « Pix », par l'utilisation d'un compteur comme celui qui est décrit ci-dessus. Il suffit alors d'introduire ce compteur dans une formule qui active la fonction « rand » pour calculer les coordonnées d'un pixel aléatoire dans le carré ABCD. Nous indiquons l'usage de cette formule dans l'annexe 3.

Les Cabri-outils présentés ci-dessous seront utilisés pour la simulation ou la représentation d'une expérience aléatoire dans le cadre de probabilités géométriques, en constituant notamment le dispositif informatique donnant la représentation à l'écran d'une urne de Bernoulli. L'utilisation d'un tel environnement pour la mise en place d'une double démarche d'expérimentation et de modélisation nous conduit à la formulation d'une sous-hypothèse de recherche, contextualisée dans le cadre de notre ingénierie didactique :

La réalisation ou la simulation d'une expérience aléatoire dans un environnement informatique de géométrie dynamique, le micromonde Cabri, rend disponible pour les élèves des éléments du contexte qui favorisent la compréhension :
- ✓ **des concepts probabilistes élémentaires ;**
- ✓ **du lien entre fréquence et probabilité lors de la résolution de problèmes dans le cadre des probabilités géométriques.**

Nous attribuons le caractère adidactique aux différentes possibilités offertes aux élèves par l'environnement d'utilisation, de validation et de contrôle des résultats probabilistes obtenus.

§3.2. La présentation des pixels adoptée dans la séquence didactique

Dans ce sous-paragraphe, nous allons revenir sur l'interprétation de ce qu'est un pixel, telle que nous l'avons présentée au paragraphe 2.1.2 de ce chapitre, afin d'analyser ses conséquences sur les activités proposées dans les situations didactiques qui composent notre ingénierie.

La transposition informatique en cours nous amène à regarder de plus près les aspects de l'interface et de l'univers externe du dispositif informatique.

> Nous trouvons chez Balacheff (1994b), page 365, le découpage du « monde » fait par un dispositif informatique :
> - ✓ L'univers interne : composants qui permettent la mise en œuvre du dispositif informatique, comme les langages de programmation, entre autres.
> - ✓ L'interface : lieu de la communication entre le sujet et le dispositif informatique.
> - ✓ L'univers externe : dans lequel se trouve le sujet et, éventuellement, d'autres dispositifs en relation avec les connaissances en jeu dans le dispositif informatique.

Analysons d'abord l'interface de notre dispositif informatique, faisant apparaître à l'écran une association entre Cabri II et un tableur, en l'occurrence, Excel. Du fait que la représentation des objets à l'écran est constituée d'un pavage fini de pixels (écran cathodique), nous proposons aux élèves une interprétation didactique de ce dispositif.

À des fins didactiques, un pixel Ã , composant minimal d'une image électronique, sera présenté aux élèves comme un petit carré à l'écran qui, du point de vue géométrique, apparaît comme la représentation des points, géométriquement situés dans ce carré. En conséquence, les pixels tapissent l'écran en un carrelage extrêmement fin et discrétisent la surface de n'importe quel domaine déterminé sur cet écran.

Un point P est alors représenté visuellement par le pixel Ã qui le contient.

Cette présentation d'un pixel est une interprétation techniquement acceptable [(39)] et importante d'un point de vue didactique. Nous cherchons à simplifier l'usage que les élèves feront de cet objet informatique : la forme d'un carré élémentaire permet de tapisser complètement l'écran et en conséquence, permet de discrétiser n'importe quelle représentation de figure géométrique sur cet écran.

Nous situons ainsi les interactions entre les élèves et le dispositif informatique pour permettre une explication des appréhensions perceptives des représentations à l'écran, au sens de Duval (1994), soit suffisante pour la démarche de modélisation que nous voulons introduire.

> *Les limites de l'interaction fondée sur la perception sont susceptibles de conséquences sur les apprentissages, elles peuvent être aussi la source d'une problématisation féconde de concepts mathématiques. La phénoménologie particulière de l'interface devient une caractéristique qui doit être prise en compte dans l'analyse du "milieu" dont le dispositif informatique permet la réalisation.* (Balacheff, 1994a, p. 19).

L'interprétation didactique de la notion de pixel que nous proposons dans ce travail cherche à rendre perceptive la discrétisation des surfaces planes représentées et manipulées à l'écran, interface du dispositif informatique. Cette perception permet aux élèves d'établir un lien entre probabilité géométrique [(40)] et pré-probabilité [(41)].

[(39)] En réalité, les pastilles portant les trois couleurs fondamentales sont disposées en triangles équilatéraux que l'on peut inscrire dans des carrés que nous appelons les pixels, dont les côtés sont horizontaux et verticaux.

[(40)] Probabilité géométrique : probabilité continue, conçue comme rapport d'aires de domaines intervenant dans une expérience située dans le cadre géométrique.

[(41)] Pré-probabilité : conception de probabilité discrète, conçue comme chance d'obtenir un succès lors d'un

§3.2.1. Choisir un pixel au hasard dans une figure Cabri.

Comment peut-on choisir un pixel au hasard lors de l'utilisation de Cabri II comme environnement informatique pour la simulation d'expériences aléatoires ?

Cela suppose de savoir caractériser, au sens du logiciel, la surface en question. Pour bien comprendre cette démarche d'utilisation de l'environnement Cabri et de son générateur de hasard [(42)], nous partons de la figure la plus simple pour cet usage : un rectangle ABCD, que nous positionnons à l'écran conformément la figure ci-contre (base horizontale). Nous pouvons mesurer les longueurs de ses côtés [AB] et [AD], en obtenant les dimensions « *a* cm » et « *b* cm », respectivement, données au millimètre près.

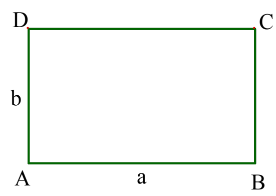


Figure 16

La possibilité de choisir un pixel au hasard dans un cabri-dessin existe par l'usage de la fonction « rand », accessible au moyen de l'outil « calculatrice ». Pour bien nous assurer qu'à chaque tirage nous obtenons un et un seul pixel, et que tous les pixels peuvent être obtenus, il nous faut introduire quelques précisions. Tout d'abord, il nous faut regarder les conséquences didactiques de l'interprétation de la notion de pixel que nous avons retenu, ainsi que son fonctionnement dans l'environnement Cabri.

Selon le modèle de pixel que nous proposons, on peut considérer que l'écran est tapissé par un carrelage de *30 pixels* x *30 pixels* par centimètre carré. Chacun de ces petits carrés élémentaires est bien identifié par un couple de *coordonnées entières*, si nous prenons le côté d'un pixel comme unité. Ces coordonnées seront associées à un système d'axes, d'origine A, les points B et D définissant, respectivement, les axes des abscisses et des ordonnées.

Ainsi, si «a » et «b » sont exprimés en cm (au millimètre près), ce rectangle comprend 30a x 30b pixels. Choisir un pixel *au hasard* dans ABCD signifie alors, dans cette configuration, que **la probabilité d'obtenir un pixel Ã donné lorsque l'on active la fonction « *rand* » dans Cabri est *équirépartie* sur ce rectangle et vaut** $\frac{1}{30a \times 30b}$**.**

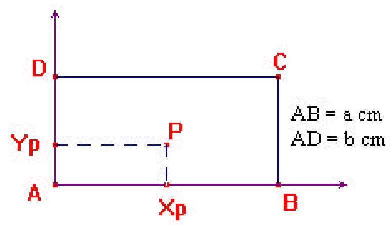


Figure 17

---

tirage *au hasard* dans une urne de Bernoulli. (Rapport du nombre de boules blanches au nombre total de boules contenues dans cette urne lors de la prise en compte du hasard, cf. §4.3, chapitre II).

(42) Nous le considérons comme tel, même si l'on peut contester l'existence d'un processus purement aléatoire issu d'un calcul effectué par un logiciel.

Soulignons que le “modèle” d’écran ainsi tapissé a une fonction didactique : induire, chez les élèves, une représentation mentale cohérente de la discrétisation d’une surface, les permettant d’établir le lien entre le rapport d’aires d’une probabilité géométrique et la proportion de boules dans une urne de Bernoulli. Par conséquent, la formule utilisée pour “choisir au hasard” un pixel à l’écran ne prend pas nécessairement en compte la valeur « 30 » comme paramètre. La formule utilisée sera présentée dans l’annexe 3.

§3.3. Le dispositif « Urne à Pixels »

Soit un rectangle, représenté à l’écran par le Cabri-dessin ABCD ci-contre. Un point P de ce rectangle est représenté par un pixel $\wp$ créé par le dispositif décrit tout au long du paragraphe précédant de ce chapitre. Soit un segment [EF], perpendiculaire au segment [AB] tel que le point E soit un point libre mobile sur [AB]. (cf. la figure ci-contre.)

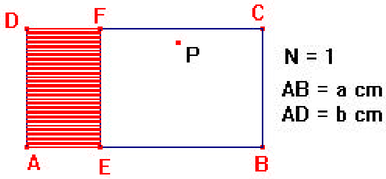


Figure 18

Choisissons un pixel $\wp$ au hasard dans le rectangle ABCD. Nous considérons comme succès l’événement « *le pixel créé est dans le rectangle AEFD* ». **Nous appellons ce dispositif ainsi constitué une « Urne à Pixels ».**

Cette urne à pixels peut être considérée comme **une représentation à l’écran d’une urne de Bernoulli modélisant une expérience de Bernoulli donnée**. Comme nous l’avons déjà fait remarquer au paragraphe 2.1.2 de ce chapitre, *le dispositif « urne à pixels » est l’outil de simulation de l’expérience de référence « tirage au hasard d’une perle dans un pot rempli de perles rouges et bleues »*.

Regardons alors le lien entre la définition laplacienne de la probabilité d’obtenir un succès lors de la réalisation d’une expérience aléatoire et la définition de la probabilité géométrique comme rapport d’aires. Ce lien est fait par le biais de la discrétisation des surfaces, que nous avons fait pour la mise en fonctionnement de l’urne à pixels.

D’après la définition donnée par Laplace, présenté au paragraphe 2.5 du Chapitre I, la probabilité d’un événement issu d’une expérience aléatoire est exprimée par le rapport entre le « nombre de cas favorables à cet événement et celui de tous les cas possibles » [(43)]. Cette probabilité est ainsi une « mesure » que l’on peut résumer par la fraction :

[(43)] Premier principe, présenté dans son Essai Philosophique sur les Probabilités.

$$\boxed{\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de tous les cas possibles}}}$$

La discrétisation des surfaces des rectangles ABCD et AEFD renvoie alors à la notion primitive de mesure d'aire : le comptage des pixels (carrés-unité, comme nous l'avons présenté au début du paragraphe 3.2 de ce chapitre) qui remplissent chacune de ces figures. Nous pouvons alors associer les « cas favorables à l'événement » aux pixels qui tapissent AEFD, ainsi que « tous les cas possibles » aux pixels qui tapissent ABCD.

Dans la mesure où on considère tous les pixels de ABCD comme équiprobables, cette association nous permet de reformuler la fraction ci-dessus, qui exprime la probabilité d'obtenir un succès :

$$\boxed{P(\text{succès}) = \dfrac{\text{nombre de pixels dans AEFD}}{\text{nombre de pixels dans ABCD}}}$$

Finalement, en renvoyant à la notion primitive d'aire, nous remarquons que le nombre de pixels dans AEFD mesure l'aire de ce rectangle par rapport à l'aire unité constituée par un pixel, ainsi que le nombre de pixels dans ABCD mesure son aire. Dans l'interprétation de pixels que nous adoptons dans ce travail pour l mise en œuvre du dispositif « urne à pixels », on admet qu'un segment quelconque représenté à l'écran, contient toujours un nombre entier de pixels.

L'expression pour le calcul de la probabilité d'obtenir un succès pour l'expérience aléatoire « choisir *au hasard* un pixel dans le rectangle ABCD » devient alors l'expression de la probabilité géométrique :

$$\boxed{P(\text{succès}) = \dfrac{\text{aire du rectangle AEFD}}{\text{aire du rectangle ABCD}}}$$

Nous utiliserons alors cette probabilité géométrique associée à une urne à pixels comme un moyen pour aborder et reformuler des problèmes de détermination et d'estimation d'une probabilité.

Sur le plan didactique, cette discrétisation de la surface de chacun des rectangles AEFD et ABCD par l'usage des pixels, donne un sens au calcul que les élèves doivent effectuer pour résoudre le problème : « *déterminer les chances d'obtenir un pixel dans le rectangle AEFD* ». Cet usage peut être généralisé à n'importe quelle figure géométrique dans laquelle nous pouvons caractériser un sous-domaine « succès » : il suffit de bien déterminer le nombre des pixels qui recouvrent chacune de ces figures. Autrement dit, il suffit de connaître les aires de chacune d'elles en unités de pixels. Dans ce cas, les élèves peuvent toujours associer l'aire au nombre de pixels, et ensuite, associer le nombre de pixels au nombre de boules qui remplissent l'urne de Bernoulli modélisant l'expérience aléatoire en jeu. Dans cette démarche, ils associent « en acte » le rapport des aires à la probabilité des succès, phase de synthèse dans la résolution du problème posé.

§4. Conclusion : le dispositif expérimental constitué

L'introduction de ce chapitre présente la question principale de cette recherche, dont les éléments de sa problématique ont été décrits tout au long des chapitres I et II.

« Dans quelles conditions didactiques les élèves peuvent-ils se familiariser avec des situations aléatoires en contexte scolaire et s'engager dans une appréhension en termes de modèle de telles situations dès le Collège ? »

Le développement des chapitres I et II nous a conduit à la formulation des hypothèses de travail et des hypothèses de recherche qui guident la construction de notre ingénierie didactique. Pour bien mener les activités qui composent cette ingénierie, nous avons constitué un environnement informatique fondé sur l'usage de la géométrie dynamique pour la mise en place d'une démarche expérimentale pour la modélisation de situations aléatoires de Bernoulli. Ainsi, le micromonde Cabri II en association avec Excel nous permet la mise en œuvre d'un tel environnement au moyen du dispositif informatique « *Urne à Pixels* », présenté au paragraphe 3 de ce chapitre.

Nous faisons alors l'hypothèse que la double démarche de modélisation, qui permet la coexistence de l'approche fréquentiste et de l'approche laplacienne à la notion de probabilité, fournit les conditions didactiques suffisantes à l'introduction aux situations aléatoires dès le Collège. Cette démarche est fondée sur une séquence d'activités construites de telle façon à ce que chaque activité participe à la constitution de celle qui va suivre. En conséquence, une telle introduction n'est pas coûteuse que ce soit du point de vue des connaissances pré-requises ou du point de vue des savoir-faire constitués par cet enchaînement de situations didactiques.

Les chapitres qui suivent l'analyse théorique et l'analyse a posteriori de chacune des situations qui constituent notre ingénierie didactique, partant du niveau macro-didactique et allant niveau micro-didactique, selon les termes de Artigue (1988).

CHAPITRE IV : ANALYSE DE LA PREMIÈRE SITUATION DIDACTIQUE – « EXPÉRIENCE DE BERNOULLI »

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'analyser la première situation de notre ingénierie didactique, « Expérience de Bernoulli ». Cette analyse sera menée d'abord selon un point de vue théorique (analyse a priori), en passant par la description de son déroulement effectif pour, finalement, aboutir à l'analyse a posteriori des activités qui la composent.

Ainsi, au cours de ce chapitre, nous nous proposons de développer des éléments qui nous permettront de formuler des conclusions sur l'efficacité de l'ensemble des activités proposées par rapport aux objectifs présentés au paragraphe 2 du Chapitre III. Nous nous proposons aussi de dégager des éléments qui, en liaison avec ceux qui seront dégagés dans les deux chapitres qui suivent, nous permettront d'éclairer les hypothèses de recherche présentées au paragraphe 1 du Chapitre III.

§1. Analyse a priori des activités qui composent la situation « Expérience de Bernoulli »

Objectifs principaux de la situation :

- Apporter aux élèves des éléments qui permettent l'identification de la configuration d'une expérience de Bernoulli ;
- Apporter aux élèves des éléments qui permettent de modéliser une expérience de Bernoulli par le modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli.

Les deux activités qui composent cette situation didactique, « L'aléatoire dans la réalité » et « L'urne de Bernoulli », ont un lien étroit avec notre hypothèse de recherche HR_1 : l'accent est mis sur l'observation et la description d'une situation de la vie courante des élèves. Le but de cette description est d'entamer le processus d'abstraction qui doit se dérouler sur toute la suite des activités composant cette situation didactique. Ce début d'abstraction passe par une interprétation de la situation de la réalité par un modèle d'urne de Bernoulli, conformément à ce que nous avons décrit au chapitre précédent. À l'issue de cette situation, la modélisation sera présentée aux élèves de façon à ce qu'ils puissent la reconnaître comme un outil économique et efficace pour l'analyse et la comparaison de situations de la réalité locale qu'ils veulent étudier. Cette démarche est ainsi conforme à la notion de modèle que nous avons retenue lors de la présentation faite au Chapitre I.

Le rôle de l'enseignant est crucial pour conduire les élèves dans le passage d'une appréhension naï ve de l'aléatoire vers une appréhension du type scientifique : la prise de recul permettant d'analyser les situations aléatoires selon le point de vue de leur reproductibilité, conformément au schéma 1 présenté au paragraphe 1.4 du Chapitre I.

En particulier, nous cherchons à obtenir ce changement de point de vue par les élèves au moyen de la mise en évidence de la variation des fréquences obtenues expérimentalement et son rapport avec l'aléatoire.

Chaque activité est organisée en tâches, de façon à ce que les élèves puissent accomplir chaque étape vers la construction d'un modèle par un travail qui vise à transformer leurs connaissances spontanées à propos du hasard (cf. HT_1) en une approche de type scientifique. Nous envisageons ainsi la construction d'un modèle et de son domaine de validité pour que les élèves puissent mobiliser de façon adéquate leurs conceptions sur «expérience aléatoire », « modèle » et « urne de Bernoulli », en train de se construire (cf. §3 du Chapitre I).

§1.1. Activité A_1 : l'aléatoire dans la réalité

§1.1.1. Présentation de l'activité

Cette activité sert :

i) à repérer l'effet du hasard sur les résultats observés ;

ii) à introduire les notions de protocole expérimental, d'ensemble des issues possibles déterminé à partir de regroupements de résultats qui peuvent être obtenus lors des expérimentations réalisées en application de ce protocole expérimental ;

iii) à introduire une première approche de la notion d'expérience aléatoire à partir de la description de l'expérience concrète proposée.

L'activité A_1 est organisée en deux parties, dont une partie préalable, contenant des activités hors-classe, et une partie contenant des activités en classe. Nous avons, pour chaque objectif à accomplir, une tâche qui lui est associée. Les tâches qui composent l'ensemble de l'activité correspondent aux trois premiers pas de la démarche de modélisation que nous avons proposée au schéma 9, Chapitre III, § 1.2, dans laquelle nous insérons un nouveau pas :

le choix des caractéristiques pertinentes dans la description, conduisant à préciser les invariants à retenir. Les actions de l'élève se placent complètement dans le domaine de la réalité, même si le processus d'abstraction est déjà entamé par la délimitation du domaine de fonctionnement attaché au modèle en construction (cf. schéma 2, Chapitre I, §3.1).

Domaine de la réalité.

1 – ***Observation*** de la situation aléatoire de la réalité à modéliser.

↓

2 – ***Description, en langage naturel***, pour mettre en évidence l'intervention du hasard et l'interprétation des résultats de l'expérience reproductible en termes de « succès » ou « échec ».

↓

3 - ***Choix des caractéristiques pertinentes à retenir*** pour la caractérisation de la situation aléatoire en jeu, en vue de sa reproduction éventuelle.

↓

4 - ***Élaboration d'un protocole expérimental***, outil de reproduction de l'expérience en jeu (n observations d'une situation de Bernoulli) *et* ***détermination des critères de classement des résultats observables*** en termes de « ***succès*** » ou « ***échec*** ».

Schéma 13

Nous utilisons dans cette démarche la hiérarchie existante entre la forme verbale et la forme écrite du langage (Farago, 1999) pour induire le processus d'abstraction : la description faite d'abord oralement en langage courant, sous la forme d'un dialogue intra-groupes, doit évoluer vers une forme plus organisée, c'est-à-dire le protocole expérimental. Ce protocole est alors construit en ne prenant en compte que les caractéristiques utiles à la reproduction envisagée.

Soulignons à nouveau que chaque étape proposée aux élèves introduit des éléments pour la résolution du problème qui sera proposé dans l'étape qui suit. Cette remarque est essentielle pour assurer la cohérence et la continuité du processus didactique.

§1.1.2. Analyse de la tâche

Cette première activité sera mise en place avec les élèves organisés par groupes. Ainsi, dans un premier moment, les activités préalables auront leurs résultats communiqués d'abord dans les groupes, et seulement dans un deuxième moment, l'enseignant mettra en place un débat pour permettre les échanges extra-groupes dans la classe. Ce choix de deux phases, une phase intragroupe et une phase intergroupe, envisage dans un premier temps l'extériorisation des conceptions spontanées de **chaque** élève au sein d'un groupe, avant qu'elles soient confortées ou réfutées dans les échanges intergroupes.

Première étape : perception du hasard.

Exercice préalable [44] :

Proposez deux exemples de situations que vous avez rencontrées dans lesquelles le hasard intervient. Proposez au moins une situation qui ne soit pas un jeu de hasard. Faites ces propositions par écrit.

Du fait que cette activité est préalable à la séquence didactique, il faut donner aux élèves des conditions pour communiquer leurs exemples de situations hasardeuses [45] aux autres élèves et à l'enseignant. Ainsi, la première activité de la situation didactique « Expérience de Bernoulli » commence par une question dont le but est de nourrir un débat sur la perception du hasard et la distinction entre situation reproductible et situation contingente :

« On va discuter de ce qu'est le hasard pour vous. Pour cela on va commencer par étudier tous ensemble les exemples que vous avez proposés. Pourquoi pensez-vous que le hasard intervient dans cette situation ? »

Réponses attendues.

Nous attendons que les exemples proposés par les élèves soient plutôt les fruits de leur vécu, conformément à notre hypothèse de travail HT_1. Parmi les jeux de hasard, nous pouvons attendre le jeu de dés, de pile ou face, le Loto, voire les machines à sous. Dans un contexte autre que les jeux de hasard, nous voudrions faire apparaître la confrontation entre le hasard contingent et le hasard des situations reproductibles. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'un exemple de situation reproductible, comme «*choisir au hasard (sans regarder) une paire de chaussettes dans un tiroir* » n'apparaîtra pas (ou presque pas) parmi ceux qui seront proposés par les élèves. Cependant, nous attendons des élèves quelques exemples qui relèvent plutôt de la contingence. Citons deux des exemples qui sont donnés par Chrétien & Gaud (1998), dans les annexes de leur article :

- ✓ J'appelle une amie au téléphone au moment-même où, par hasard, elle-même était en train de m'appeler ;

---

[44] Les textes encadrés sont ceux qui ont été proposés aux élèves lors de la mise en place de l'expérimentation. Ils seront présentés dans les annexes 2 et 3.

[45] Nous utilisons ici le terme «situations hasardeuses » pour désigner les situations dans lesquelles il y a l'intervention du hasard, sans distinguer les situations contingentes des situations aléatoires.

✓ Trouver une pièce de 10F dans la rue.

Nous attendons alors que la contingence apparaisse dans les exemples donnés par les élèves sous la forme de faits personnalisés : témoignage de rencontres, phénomènes météorologiques spécifiques, etc. Citons, par exemple, les formulations du type «***je*** *rencontre un copain sur mon chemin pour aller au cinéma* ». Cette personnalisation place la situation dans la catégorie de faits significatifs de la contingence.

Analyse.

L'intervention de l'enseignant est alors primordiale pour le changement de point de vue, en plaçant la situation proposée dans un ensemble de situations ayant les mêmes caractéristiques que nous voulons modéliser. En changeant la formulation par une action de dépersonnalisation, l'enseignant conduit l'élève vers la distinction entre les situations potentiellement reproductibles et les situations contingentes. Ainsi, la comparaison avec la même situation proposée par l'élève, mais cette fois-ci formulée selon un point de vue statistique, sans personnaliser le fait (« *rencontrer un copain sur le chemin pour aller au cinéma* »), doit conduire à la perception des caractéristiques qui les distinguent. La reformulation proposée consiste à ne plus considérer une personne précise, mais l'ensemble de personnes susceptibles d'aller au cinéma. C'est alors le passage du point de vue personnel (hasard contingent) au point de vue collectif (hasard statistique). Autrement dit, l'élève doit faire évoluer son regard centré sur un élément spécifique de la population vers l'ensemble des éléments passibles d'avoir la caractéristique que l'on envisage d'étudier. Tel que nous l'avons développé au paragraphe 1.4 du Chapitre I, «*la question est alors d'étudier ce fait comme étant un élément d'un ensemble de faits semblables placés dans une même structure* ». Nous désignerons le point de vue collectif par **« point de vue statistique ».**

Les échanges verbaux intra-groupes, ainsi que les éventuelles interventions de l'enseignant, préparent les conditions pour l'introduction de ce que nous venons de définir comme le point de vue statistique. Ce point de vue sera ainsi présenté comme outil incontournable pour l'analyse d'une situation de la réalité dans le but de la modéliser. Il s'agit alors d'une première étape dans la mise en évidence des limitations d'une appréhension naï ve du hasard, lorsque les groupes doivent rédiger leurs exemples de situations aléatoires. Ces différents points de vue seront ainsi explicités par écrit sous la forme d'affiches, rédigées au sein de chaque groupe.

Les élèves débutent alors la seconde phase de ce processus de modélisation, dans laquelle ils doivent identifier les caractéristiques pertinentes et éliminer des caractéristiques non pertinentes pour la reproductibilité d'une situation aléatoire [46]. Cette distinction entre pertinence et non-pertinence sera travaillée par les élèves au moyen de l'observation et la description d'une situation de la réalité afin de reproduire les conditions dans lesquelles cette situation peut se dérouler.

Les échanges verbaux intra-groupes, ainsi que les éventuelles interventions de l'enseignant, préparent les conditions pour une première identification, par les élèves, de cette distinction. Ils commencent alors à délimiter le domaine de fonctionnement qui sera attaché au modèle en construction, comme nous l'avons défini au paragraphe 3.1 du Chapitre I.

Domaine de la réalité → situation de la réalité à modéliser.

Domaine de fonctionnement :
ensemble de caractéristiques de la situation aléatoire choisies comme pertinentes pour la modélisation.

Cette première étape est conduite par l'enseignant sous la forme de dialogue collectif en classe. L'objectif est de mettre en évidence l'importance de premièrement passer du point de vue individuel au point de vue statistique, ce qui donne du sens à l'idée de reproductibilité d'une situation : les faits contingents ne se reproduisent pas à l'identique.

Deuxième étape : observation et description d'une situation aléatoire.

Activité préalable.

a) Situation 1 : Observez les voitures qui sont dans un parking d'une grande surface. Parmi elles, il y en a des rouges. Peut-on savoir d'avance si la première voiture qui va sortir du parking sera rouge ? Pour avoir une idée sur la proportion de voitures rouges dans l'ensemble du parking, notez le nombre de voitures rouges qui sortent du parking parmi les 10 premières. Répétez cette expérience plusieurs fois. En se plaçant en tant qu'observateur, faites une description de cette situation.
b) Situation 2 : On désire avoir une indication sur la proportion de filles parmi les élèves du collège. Pour cela, notez le nombre de filles parmi les 25 premiers élèves qui sortent du collège après la fin d'un cours. Recommencez cette observation plusieurs fois et préparez votre compte-rendu. En se plaçant en tant qu'observateur, faites une description de cette situation.

Réponses attendues.

Dans un premier temps, l'activité se déroule intragroupe. Chaque élève doit communiquer ses observations à ses camarades. Pour cette première description, nous attendons que les élèves

[46] Situation aléatoire reproductible, selon les éléments que nous avons mis en évidence au §1.5 du Chapitre I : « *Les situations potentiellement reproductibles sont des situations de la réalité que nous pouvons considérer comme reproductibles au moins par la pensée, car elles relèvent d'une description assez exacte des conditions dans lesquelles elles peuvent être reproduites* ».

donnent des images naïves, sans analyse des faits pertinents pour la reproduction de ces situations. Ainsi, pour l'expérience « *sortie du parking* », les élèves peuvent par exemple prendre en compte (ou ne pas prendre en compte) quelques caractéristiques non pertinentes pour l'observation de la couleur de la voiture sortante :

- ✓ La marque de la voiture ;
- ✓ Les conditions météorologiques au moment de l'observation mise en place : il pleuvait, il faisait beau, …
- ✓ Le moment-même de l'observation : matin, après-midi, quel jour dans la semaine, …
- ✓ Le nombre de personnes dans la voiture observée ;
- ✓ Les différentes nuances de la couleur « rouge », selon le type de voiture observée ;
- ✓ etc.

De même, pour la demande explicite de l'énoncé de décrire la situation de la réalité en se plaçant comme un observateur, et non comme la personne qui réalise les expérimentations. Pour la Situation 1, par exemple, la description attendue pourrait être : « *on a choisi une grande surface, on s'est placé à la sortie de son parking, on a noté la couleur des 10 premières voitures qui sortaient* ». La description pourra être complétée par un comptage de succès : « *on a compté le nombre de voitures rouges parmi les 10 premières voitures qui sont sorties du parking* ».

<u>Analyse.</u>

Du fait que la consigne de l'activité préalable demande à l'élève de recommencer l'observation, cette première description pourra être confortée par sa mise en œuvre lors d'une répétition de l'expérience. Par contre, c'est l'élève lui-même qui critique sa propre description. En sachant que le but de la description est la communication de l'expérience à une tierce personne (rôle d'un observateur), les rétroactions possibles dans ce contexte sont :

- ➪ Observer une voiture sortant du parking choisi depuis une sortie non prévue au départ (cas où il existe plus d'une sortie pour le parking). L'action attendue de la part de l'élève est un retour sur sa description (son protocole expérimental) afin de mieux expliciter les conditions requises pour l'observation envisagée ;
- ➪ Observer une voiture qui arrive au parking pendant l'observation. L'action attendue de la part de l'élève est un questionnement sur la validité des résultats obtenus (de la proportion de voitures rouges établie à la fin de l'observation) ;
- ➪ Observer une voiture d'une couleur dont la classification comme « rouge » présente des ambiguïtés. L'action attendue de la part de l'élève est un retour sur les critères de

classement des résultats en succès et échec : dans quelles conditions peut-on dire qu'une voiture est rouge ?

- Observer des véhicules rouges et revenir sur les critères de classement des résultats : doit-on compter les camionnettes, les motos, etc. ?
- Faire fonctionner le protocole par un deuxième élément du groupe qui le rédige. L'action attendue de la part de l'élève est en rapport avec la réussite ou l'échec de cette mise en fonctionnement pour une vérification de la clarté de la description.
- Associer la description avec les protocoles expérimentaux utilisés en Sciences Physiques (cf. Chapitre II). L'action attendue de la part de l'élève est de dégager de ces protocoles des éléments pour l'organisation de la description qu'ils sont en train de faire. Une deuxième action attendue est la mobilisation par l'élève de deux propriétés-en-acte associées à la fonction d'un protocole expérimental :
    - si le protocole est précis, alors une tierce personne peut reproduire exactement la même expérience ;
    - si l'expérience est reproductible, alors elle peut se décrire par un protocole expérimental suffisant et précis.

Nous pouvons alors identifier certains éléments du milieu pour l'apprentissage de la notion de « *protocole expérimental* » selon le vocabulaire probabiliste :

- ✓ le parking (organisation physique) ;
- ✓ l'ensemble de voitures garées dans ce parking ou passibles d'entrer dans ce parking pendant les observations ;
- ✓ les connaissances préalables des élèves sur la notion de «*protocole expérimental* » selon l'usage en Sciences Physiques et les éléments du groupe qui réalise l'observation.

La consigne « en se plaçant en tant qu'observateur, faites une description de cette situation » doit placer l'élève en situation de formulation et de validation en référence à une situation d'action au moins évoquée : observer la sortie du parking et observer la sortie du collège. Du fait que l'élève peut ne pas reconnaître les autres éléments du groupe comme partenaires dans le déroulement de la situation didactique, il peut y avoir comme conséquence l'internalisation de la phase de formulation et de validation. Dans ce cas, d'après Perrin-Glorian (1999), la connaissance acquise sur la notion de « *protocole expérimental* » reste privée :

> *(...) Cependant, la position adidactique peut tout à fait exister dans une situation d'action : le sujet communique avec lui-même et valide pour lui-même, mais la situation n'oblige pas à communiquer avec d'autres. La connaissance acquise reste privée.* (Perrin-Glorian, 1999, p. 288).

Il est alors difficile à l'élève d'être conscient d'implicites attachés à son action. Ces implicites peuvent devenir un obstacle à la validation : l'élève connaît déjà l'action qu'il doit faire, sans sentir le besoin de la valider en se plaçant délibérément comme une personne étrangère à l'expérience et qui doit la reproduire.

Citons par exemple l'explicitation du moment de départ de l'observation. L'élève qui rédige son propre protocole expérimental peut ne pas expliciter dans ce protocole le moment précis où il doit commencer à noter les voitures sortantes. Cependant, ce moment est un choix de l'expérimentateur : doit-on fixer le départ par rapport à un moment donné par une horloge (à la minute près) ou le fixer par rapport au moment précis où on arrive à la sortie de ce parking ? Peut-on commencer le comptage à partir de la première voiture rouge à sortir ? Du fait que l'élève lui-même reprend son protocole expérimental pour recommencer l'expérimentation, il peut faire les mêmes choix pour démarrer l'observation, sans que ces choix soient explicitement rédigés.

Pour que l'élève accède à cette prise de conscience des implicites, l'activité en classe comportera les questions suivantes :

a) Est-il possible de représenter les exemples que vous avez proposé et les situations 1 et 2 par un prélèvement au hasard dans une population ? b) Dans quelles conditions peut-on dire qu'on a reproduit une situation aléatoire ?

Dans la question (a) il y a deux notions qui n'ont pas été encore introduites : *population* et *prélèvement hasard dans une population*. Pour la notion de *population,* nous gardons la même signification que celle introduite [(47)] depuis la classe de cinquième, dans le cadre de l'enseignement de la statistique : **ensemble d'individus sur lesquels porte l'étude. Par exemple, pour l'expérience "parking", la population est constituée par l'ensemble des voitures qui sont garées dans le parking au moment de l'expérimentation, chaque voiture étant un individu de cette population.** Au besoin, l'enseignant peut alors intervenir afin de clarifier cette notion.

[(47)] D'après ce que nous avons observé dans le programme et dans quelques manuels pour la classe de 5^{e}, cette introduction n'est pas explicite, mais par ostension.

La consigne introduit aussi le *prélèvement au hasard dans une population*. Pour que les élèves puissent y répondre, il est essentiel que l'enseignant définisse cette notion : **l'extrait d'un élément d'une population de telle sorte que chaque élément de cette population ait la même "chance" d'être choisi.** Nous utilisons ainsi de façon délibérée un vocabulaire propre à la statistique en faisant l'hypothèse que cette introduction ne posera pas de problème pour les élèves. Ce choix se justifie par le besoin d'élargir le vocabulaire des élèves afin d'aboutir à une formulation plus scientifique lors qu'ils commencent la démarche de modélisation. Ainsi, les expressions *tirage au sort* ou *tirage au hasard*, utilisées dans le langage courant, prennent du sens dans le langage scientifique par l'introduction d'une expression plus formelle tel que *prélèvement au hasard*.

Cette rupture langagière se prépare déjà à la première étape de cette activité, lors de la mise en commun des exemples apportés par les élèves, par l'introduction du point de vue statistique faite par l'enseignant. Elle précise alors le vocabulaire et l'appréhension du hasard à mettre en fonctionnement pour caractériser des situations aléatoires reproductibles. Selon le schéma 1 au Chapitre I, ces situations peuvent être représentées par un prélèvement au hasard dans une population.

Du fait que cette notion de prélèvement au hasard, ainsi que la notion de *protocole expérimental* ne sont pas encore stables chez l'élève, elles n'appartiennent pas au milieu effectif [(48)] pour l'apprentissage de la notion de *situation reproductible*. En conséquence, nous n'avons pas installé un milieu adidactique pour l'apprentissage de la notion de *situation aléatoire reproductible*, enjeu de cette activité A_1.

Les élèves doivent alors dégager les premiers critères pour "classer" les exemples par rapport au type de hasard qu'ils comportent au moyen d'une re-définition de l'expérience aléatoire en jeu en termes de prélèvement au hasard. Prenons l'exemple d'une expérience aléatoire qui consiste à étudier la couleur des voitures qui sont garées dans un parking d'une grande surface. Une façon possible pour prélever un individu *au hasard* dans cette population est d'observer la première voiture qui passe par une sortie pré-choisie de ce parking, à partir d'un moment aussi pré-fixé. L'expression *au hasard* traduit l'hypothèse d'équiprobabilité formulée sur cette population et sur les conditions expérimentales choisies. On peut imaginer de multiples situations dans lesquelles cette hypothèse d'équiprobabilité ne serait pas pertinente. Mais, dans une approche statistique, on peut déclarer qu'il n'y a pas en général de raisons particulières pour que la couleur de la voiture influe sue le moment où elle sortira du parking, ce qui permet de valider l'hypothèse.

[(48)] Au sens de Perrin-Glorian (1999).

Réponses attendues.

Même si l'élève a un blocage à la lecture de la question, l'intervention de l'enseignant pour expliciter la signification des nouvelles notions doit lui permettre de formuler une réponse. Nous attendons que l'élève puisse associer, à l'aide de l'intervention de l'enseignant, les observations faites à des tirages au hasard. Cette association pourra être présentée par une « miniaturisation » des individus qui composent la population sous la forme de jouets ou d'images : les voitures du parking sont alors imaginées comme des voitures miniatures dont on peut considérer la population. Dans cette même démarche, les élèves du collège sont alors imaginés par des petites marionnettes. Le parking et le collège sont ainsi assimilés à des sacs qui contiennent des jouets, et les sorties observées à des prélèvements *au hasard* dans ces sacs. Cette métaphore se présente comme un premier pas vers la simulation.

Nous avons donc des "situations aléatoires" qui peuvent être associées à un prélèvement au hasard dans une population, et des "situations hasardeuses", qui sont dues à la contingence [(49)]. Selon ce point de vue, les situations 1 et 2 de la fiche 0 seront "classées" comme des situations aléatoires :

i) Pour la situation 1, celle des voitures qui sortent du parking, la population est donnée par l'ensemble des voitures dans le parking et la sortie d'une voiture peut être interprétée par un tirage au hasard dans cette population.

ii) Pour la situation 2, celle de la proportion des filles parmi les élèves du collège, la population est donnée par l'ensemble des élèves du collège et la sortie d'un élève est interprétée par un tirage au hasard dans cette population.

Du point de vue de l'élève, quels sont les moyens pour représenter chacune de ces situations 1 et 2 par un prélèvement au hasard ? Nous pouvons attendre un obstacle lié à la prise de décision lors de ce prélèvement : dans les tirages effectués par l'élève, il prend en charge les choix qui concernent sa mise en œuvre. Pour les situations 1 et 2, concernant la sortie du parking et la sortie du collège, l'élève est un observateur du prélèvement : il ne prend pas en charge la mise en œuvre de l'expérimentation (la réalisation des tirages) car il se place comme un observateur de la situation dans laquelle le hasard intervient indépendamment de sa propre action.

Un deuxième obstacle pourra être lié à la dimension des objets qui doivent devenir éléments des prélèvements : une voiture ou une personne n'a pas la même dimension qu'une boule ou une perle, ou un autre objet habituel pour un tirage au hasard. Ainsi, l'identification

---

[(49)] Conformément à la catégorisation proposée par le schéma 1, présenté au paragraphe 1.4 du Chapitre I.

par l'élève de la population en jeu pourra constituer une difficulté en elle-même, ou encore, pourra être à la source d'une difficulté liée au changement des objets utilisés pour le tirage au hasard.

Ces deux obstacles, constitués par la décentralisation et la dépersonnalisation de la situation à modéliser, sont introduits par la mise en place d'un point de vue statistique : l'élève doit regarder non seulement une voiture, mais l'ensemble des voitures qui sont dans le parking. De même, il ne regarde pas l'élève qui sort du Collège, mais l'ensemble des élèves qui peuvent sortir du Collège. Cela nous indique l'existence d'un saut informationnel, d'une rupture très forte. L'enseignant sera alors probablement amené à expliciter les hypothèses à faire pour la modélisation et à suggérer la formulation statistique de la situation en termes de « *prélèvements au hasard* ». Citons les hypothèses formulées dans les items (i) et (ii) ci-dessus. Cette intervention est justifiée par le fait que si l'élève ne change pas de point de vue, d'une approche « individuel » ou « contingent » vers un approche « statistique », il ne peut pas s'engager dans la suite de la démarche proposée par la situation didactique. Il est alors possible que l'élève adopte les reformulations de l'enseignant seulement par effet de contrat, mais nous attendons des situations suivantes, qu'elles le conduisent à une appropriation progressive de ce point de vue statistique.

<u>Pour répondre à la deuxième question</u>, il faut que l'élève revienne sur les observations faites pour le parking et pour la sortie du collège. Ainsi, nous attendons qu'il se pose des questions relatives au choix du parking à observer : si nous avons différents parkings, aurons-nous différentes expériences aléatoires ? L'élève doit aussi se poser des questions sur le choix d'un moment précis pour observer la sortie du collège par rapport à l'expérience aléatoire qu'on veut décrire : si on a des moments différents d'observation d'une même population d'élèves, peut-on convenir que concernant la répartition entre filles et garçons, nous aurons la répétition d'une même expérience aléatoire ?

Ainsi, il faudra que la discussion clarifie des conditions dans lesquelles l'élève peut considérer que deux expériences sont distinctes mais que dans les conditions décrites, il pourra admettre qu'il y a une reproduction d'une même expérience. Prenons par exemple la distinction entre l'observation de différents parkings (expériences distinctes) et l'observation d'un même caractère dans une même population en différents moments qui n'ont pas d'influence sur ce caractère (même expérience). Il peut aussi analyser les conditions de reproduction dans le cas des jeux de hasard, pour lesquels il y a toujours des règles de manipulation à suivre pour les joueurs.

Notre objectif est que la réponse à la question posée passe par la description de la situation sous la forme d'une liste de consignes à suivre et par l'explicitation de l'ensemble des résultats possibles. Autrement dit, l'objectif est l'installation de la notion « *d'expérience aléatoire* ».

§1.1.3. Connaissances en jeu

Dans cette phase, l'idée de hasard, l'idée de reproductibilité, la notion d'expérience aléatoire en tant que liste de consignes et liste d'issues possibles constituent l'enjeu de la situation didactique. Nous avons aussi la dépersonnalisation et la décentration de la situation observée vers sa reproductibilité, introduites par la demande de représenter les deux situations 1 et 2 par un prélèvement au hasard. Ces connaissances et savoirs-faire vont être des éléments essentiels pour le déroulement des situations didactiques à venir.

Ces connaissances requièrent des habilités langagières. Elles sont introduites comme un vocabulaire de base pour permettre la distinction entre réalité (situation aléatoire) et sa représentation abstraite (expérience aléatoire), aussi bien que la distinction entre l'aléatoire et la contingence.

§1.1.4. La prise en compte de l'incertitude et le changement de contrat

Le déroulement de cette situation didactique doit provoquer un changement du contrat habituel dans une classe de mathématiques, dans la mesure où il n'intègre pas les indicateurs de validation systématique du type « vrai - faux ». Il donne ainsi un statut officiel à l'incertitude. Par exemple, pour valider la solution d'une équation il suffit de remplacer x par la valeur trouvée lors de sa résolution.

$$2x - 4 = 0 \text{ donc } x = 2.$$

Pour valider cette solution, l'élève doit remplacer x par 2 dans l'expression $2x - 4$.

Ou encore, s'il trouve la valeur $x = -2$ pour racine de cette équation, et s'il remplace x par cette valeur, il obtient « –8» pour la valeur du premier membre, ce qui invalide la réponse proposée.

Dans notre situation, l'élève doit accepter de travailler avec une validation d'une autre nature et donc élaborer des critères pour accepter ou refuser une description selon qu'elle reflète, bien ou non, la situation visée. Ainsi, il doit se poser la question : "*peut-on, à partir de cette description, reconstruire mentalement la caractérisation de la situation aléatoire ?*" Pour bien répondre à cette question, il faut considérer non seulement la description elle-même, mais aussi les implicites en jeu, dus aux connaissances (en particulier) langagières des partenaires de l'activité. Il y a alors une absence de rétroaction sur la qualité de la description ainsi qu'une absence d'évaluation en termes de « vrai-faux », comme cela existe dans le contrat habituel dans une classe de mathématique.

Par exemple, pour décrire un jeu de hasard tel que «*pile ou face* », l'élève n'explicite pas toutes les étapes de ce jeu, car elles font déjà parties d'une culture commune [(50)], reconnue par tous dans le groupe. Par exemple, l'élève peut donner les étapes :

(a) Lancer une pièce de monnaie ;

(b) Regarder la face supérieure de cette pièce après son immobilisation.

Remarquons que cette description n'explicite pas que la pièce doit être lancée de façon à ce que l'on ne puisse pas connaître sa position finale avant immobilisation. Dans ce cas, la rétroaction doit être faite par l'enseignant. Il peut ainsi demander une explicitation des détails qui font partie de la description d'une situation aléatoire de façon à ce qu'une personne extérieure au groupe puisse la comprendre.

- ✓ Au plan individuel, la validation peut s'effectuer par la comparaison entre la situation réelle et la situation évoquée par la description. La validation de ces descriptions ne peut relever d'arguments théoriques tels que ceux d'une démonstration. Elle est subjective et peut-être peu fiable. C'est pourquoi les rétroactions collectives, surtout celles de l'enseignant, sont nécessaires.
- ✓ Au plan collectif, cette validation est constituée par les rétroactions du milieu social, ici constitué par les interactions entre l'élève (sujet) et les partenaires (les autres élèves et l'enseignant). Ces interactions ont pour objectif la construction des critères d'acceptabilité d'une description.

Il nous faut remarquer aussi que les justifications possibles pour les questions posées, tels que celles de la possibilité d'exprimer l'expérience du parking en termes de prélèvement au hasard, ne sont pas constitutives de la situation didactique. La consigne elle-même et le déroulement de l'activité ne place pas les élèves en situation de formulation ou de validation. L'explicitation des justifications sert, dans ce cas, plutôt à l'analyse des solutions proposées par ces élèves par une tierce personne (l'enseignant ou le chercheur). La production d'un tel discours est alors une conséquence du contrat pédagogique établi entre l'enseignant et la classe, et en conséquence, peut produire des résultats distincts lorsque nous travaillons avec différents enseignants.

[(50)] Nous renvoyons ici à la notion de « champ d'expérience », présenté au paragraphe 1, Chapitre III.

§1.1.5. Conclusion de l'analyse a priori de l'activité A_1

À l'évidence, l'activité A_1 n'est pas une situation adidactique. Elle est surtout une activité introductive dont le but est la familiarisation avec l'aléatoire par l'observation et la description des situations de la réalité dans lesquelles le hasard intervient. Le rôle de l'enseignant est primordial car c'est par ses interventions que le vocabulaire et les notions élémentaires seront introduits comme des outils qui seront mis en œuvre lors des activités suivantes.

Les validations sortent du contrat didactique habituel car elles ne sont pas des validations tranchées en termes de « vrai-faux ». Ces validations ne sont pas non plus des résultats de l'évolution de situations de validation au sens de Brousseau (1986). Elles portent plutôt sur des consensus entre les partenaires du processus de modélisation.

§1.2. Activité A_2 : l'urne de Bernoulli

§1.2.1. Présentation de l'activité

La deuxième activité, « urne de Bernoulli », est organisée de façon à compléter la démarche de modélisation débutée par l'activité A_1. Revenons au schéma 10, utilisé au Chapitre III pour présenter la Situation A, « expérience de Bernoulli », afin de reprendre les objectifs de cette activité :

(i) Introduire le tirage *au hasard* dans un pot contenant des perles comme expérience de référence pour les activités qui suivent ;

(ii) Mettre en place les éléments qui permettent de dégager les propriétés pertinentes de la situation aléatoire en jeu pour en faire un modèle ;

(iii) Mettre en évidence l'insuffisance d'un faible nombre d'observations lors de l'étude de la fluctuation d'échantillonnage pour pouvoir proposer une composition d'une urne de Bernoulli susceptible de modéliser la situation en jeu.

Pour atteindre ces objectifs, l'activité propose la mise en rapport entre les observations faites lors de l'activité précédente (la sortie du collège et la sortie du parking) et une série de 50 tirages au hasard dans un pot de perles. Le choix des valeurs « 25 » et « 50 » ont pour objectif de mobiliser la proportionnalité pour résoudre les problèmes proposés. Nous reviendrons plus loin sur l'effet de ces choix lors de l'analyse des tâches.

L'ensemble des tâches qui composent cette activité est organisé pour conduire l'élève vers un travail dans le domaine pseudo-concret. Cela est possible par la constitution, au fur et à mesure que chacune des sous-activités se déroule, d'un milieu potentiel pour l'apprentissage envisagé. Ce milieu produira les rétroactions nécessaires pour que l'élève puisse bien différencier les domaines dans lesquels il travaille à chaque étape de la modélisation. Citons la notion de proportion, qui doit mobiliser chez l'élève la connaissance-en-acte de la pré-probabilité. Cette mobilisation donne à la notion de proportion un statut de critère de validité [(51)], selon les termes de Margolinas (1993) : l'élève peut estimer ses chances d'obtenir un succès soit par le pourcentage de succès obtenus lors des 50 tirages, soit par le comptage et le calcul de la proportion des perles rouges (succès) dans le pot.

Pour bien expliciter le rôle essentiel de cette activité pour l'introduction des éléments du domaine pseudo-concret dans la démarche de modélisation qui s'installe, reprenons le schéma 9 présenté au Chapitre III, §1.2. Nous représentons ci-dessous cette démarche, en particularisant la séquence des étapes qui illustrent l'activité A_1 :

[(51)] D'après Margolinas (1993), les critères de validité sont des connaissances de l'élève qui lui permettent la validation dans une phase de conclusion (p. 130).

Domaine de la réalité

5 – ***Introduction de l'expérience de référence*** par la mise en œuvre d'un protocole expérimental et classement des succès-échecs obtenus selon la couleur des perles tirées.

Processus d'abstraction.

Domaine pseudo-concret

6 – ***Expérience aléatoire de référence*** **(ER)**, obtenue par la simplification et l'abstraction de l'expérience concrète de référence : le pot et les perles deviennent des objets de la pensée, tout en gardant leurs désignations d'objets concrets.

7 – Reconnaissance de l'expérience «ER » comme une représentation de la ***configuration d'une expérience de Bernoulli***.

8 – Formulation d'une ***hypothèse d'équiprobabilité sur « ER »***, intervenant pour introduire le modèle d'urne de Bernoulli : toutes les perles ont la même chance d'être tirées.

9 – Analyse de la ***fluctuation d'échantillonnage*** à partir de la comparaison des divers résultats obtenus expérimentalement. Mise en évidence de la nécessité d'avoir un ***assez grand nombre d'essais*** pour aboutir à des estimations pertinentes lors de cette analyse.

Processus de modélisation.

Donnée du modèle.

10 – Proposition de la ***composition d'une urne de Bernoulli pour représenter « ER »*** à partir de l'étude de la fluctuation des résultats expérimentaux (stabilisation des fréquences de succès obtenus).

Schéma 14

§1.2.2. Analyse de la tâche

Nous proposons aux élèves, repartis en binômes, la tâche suivante :

Réaliser 50 tirages au hasard, avec remises, dans un pot rempli de perles bleues et de perles rouges. Remplir un tableau avec les résultats obtenus.

Les élèves disposeront de pots avec des perles bleues et des perles rouges, mais sans indication ni du nombre effectif de perles dans ces pots, ni du rapport entre le nombre de perles rouges et le nombre total de perles. Ces valeurs sont néanmoins accessibles par comptage.

Cette tâche est proposée à partir d'un protocole expérimental fourni par l'énoncé :

✓ On mélange les perles dans le pot ;
✓ On tire une perle au hasard ;
✓ On note la couleur de cette perle ;
✓ On remet la perle dans le pot.

Cela sert à placer l'élève dans une *situation de rappel* (Brousseau, 1995) : les notions de protocole expérimental et d'expérience aléatoire, objets d'enseignement dans l'activité précédente, sont outils pour l'activité actuelle. D'ailleurs, nous pouvons classer cette activité comme une situation de réinvestissement sur ces notions, car elles n'ont pas été suffisamment travaillées lors de l'activité précédente pour que l'élève puisse les mobiliser spontanément. Cette première tâche de l'activité A_2 est alors un élément d'homogénéisation des connaissances pré-requises pour les tâches qui suivent. Nous fournissons ainsi à l'élève un exemple de :

a) Protocole expérimental : par la reconnaissance des **consignes données par l'énoncé** pour la réalisation des tirages dans le pot comme étant **le protocole expérimental** pour l'expérience aléatoire « *choisir une perle au hasard dans un pot rempli de perles bleues et rouges* ». Cette expérience sera désignée par **ER** pour la suite des activités (cf. schéma au §2 du Chapitre III) et elle deviendra un objet référent pour le modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli. ;
b) Expérience aléatoire : par un travail d'identification, dans l'expérience **ER** ci-dessus, des **propriétés caractérisant une expérience aléatoire**, conformément au paragraphe §3.3 du Chapitre II.

Dans la suite des activités, les élèves pourront se reporter à ce protocole comme le signe de l'expérience aléatoire ER.

L'énoncé suivant est alors proposé pour un travail par les binômes, qui doivent rédiger leurs réponses dans la fiche fournie par l'enseignant :

Reprenons l'activité sur la répartition des élèves du collège entre filles et garçons. Si nous représentons les filles par les perles rouges et les garçons par les perles bleues, pensez-vous que ces tirages que vous venez de faire peuvent remplacer les observations réelles ? Pourquoi ?

La tâche ci-dessus introduit effectivement l'expérience avec le pot de perles comme une expérience étalon pour la suite des activités par la demande explicite d'analyser l'expérience « *sortie du collège* » sous le point de vue d'un tirage au hasard dans un pot de perles.

La comparaison entre les deux expériences concrètes, SC [(52)] et ER, demandée par

[(52)] Nous utiliserons SC pour désigner l'expérience aléatoire « sortie du Collège », proposée à l'activité A_1.

l'énoncé, introduit l'élève dans un processus d'abstraction nécessaire à la démarche de modélisation. La nécessité de l'abstraction vient du fait que l'association «*élève – perle* » ne prend de sens que si, par la pensée, on ramène les proportions observées à des compositions comparables dans les pots de perles. Autrement dit, l'élève doit s'engager dans un processus d'abstraction de la population d'élèves observés lors de la réalisation de SC, de façon à se construire une représentation pseudo-concrète de cette population, l'urne U_{SC}. Dans ces conditions, dans une première approche, tous les élèves sont représentés dans U_{SC} et pour hypothèse, ils ont la même chance d'être observés à la sortie du collège. Nous pouvons aussi faire l'hypothèse qu'aucun de ces élèves ne va retourner dans le bâtiment après avoir été observé pour re-sortir une deuxième fois. Nous avons alors un tirage au hasard, sans remise, dans la population des élèves du Collège Plan Menu. D'ailleurs, ce tirage pourrait être réalisé en utilisant d'autres types de générateurs de hasard qui celui que constitue l'observation de la sortie du collège. Citons, entre autres, une table de nombres aléatoires ou la fonction «rand » d'une calculatrice. Ces outils peuvent être utilisés si l'on associe à chaque élève un numéro qui lui identifie.

De façon analogue, l'élève doit abstraire le pot de perles utilisé lors de la réalisation de l'expérience ER vers une représentation pseudo-concrète : l'urne U_{ER}. L'hypothèse d'équiprobabilité est aussi construite pour cette population : toutes les perles dans le pot ont la "même chance" d'être choisies. La comparaison demandée est faite ainsi dans le domaine pseudo-concret par la comparaison des deux urnes, U_{SC} et U_{ER}. Ce changement de domaines pour permettre la comparaison pourra être implicite pour l'élève : il compare d'abord les élèves du collège aux perles dans le pot déjà en termes d'urne en établissant une relation biunivoque entre les boules de chacune des urnes, U_{SC} et U_{ER}. Dans un deuxième temps, il passe à la comparaison des rapports de boules dans ces urnes, en complétant ainsi la démarche de comparaison entre les expériences SC et ER.

L'expérience concrète SC est ainsi l'objet que l'élève doit considérer pendant la construction implicite d'une représentation mentale du concept en jeu : le modèle d'urne de Bernoulli. En gardant les désignations utilisées par Steinbring (1991) lorsqu'il définit le *triangle épistémologique* [53] et [54], l'expérience concrète ER dévient le signe que l'élève doit

---

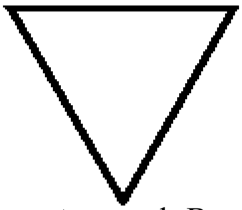
(53) « *Le triangle épistémologique représente un diagramme de relations dans lequel la signification de la connaissance ne peut pas être déduite à partir des sommets, ni le formel ni l'objectif, mais il faut toujours un équilibre de ces trois sommets.* » (Steinbring, 1991, p. 506).

(54) « *The epistemological triangle represents a relational diagram in which the meaning of knowledge cannot be deduced from one of the corners, the formal or the objective one, but always requires a balance among all corners of the triangle.* » (Steinbring, 1991, p. 506).

associer à SC lors d'un travail au sein du modèle d'urne de Bernoulli. Cela donne l'équilibre nécessaire entre les trois sommets qui représentent la formation du concept :

Objet : SC
Expérimentation concrète.

Signe : ER
Expérience étalon, dans le domaine de la réalité.



Concept : urne de Bernoulli.

Schéma 15

Le concept d'urne de Bernoulli n'étant pas encore introduit, il reste à l'élève un aller-retour entre les expérimentations concrètes et leur représentation par U_{SC} et U_{ER}, qu'il peut construire intuitivement à partir des informations disponibles : les observations faites pour les autres groupes dans la classe, rendues publiques par la mise en commun de l'activité A_1. Seulement l'intervention de l'enseignant lors de l'institutionnalisation de la notion de modèle donnera à l'élève des éléments pour la validation de l'idée intuitive de modèle qu'il est en train de se construire. Autrement dit, l'enseignant présente le modèle d'urne de Bernoulli caractérisé par une proportion et non nécessairement par les nombres de boules de chacune des couleurs. D'ailleurs, la caractérisation donnée par l'élève soit par la proportion soit par le nombre effectif de boules dans l'urne, sera prise comme un indice observable du niveau de conceptualisation de la notion d'urne de Bernoulli. Nous reviendrons sur les niveaux possibles plus loin dans cette analyse.

La mobilisation de la connaissance à propos de proportion est nécessaire lors de la comparaison entre U_{SC} et U_{ER}, à cause de la composition du pot fourni pour la réalisation de l'expérience ER. Prenons l'exemple d'un pot qui contient 50 perles, dont 24 perles rouges et 26 perles bleues pour comparer avec la proportion de filles parmi les élèves du collège. **L'énoncé ne fournit pas cette composition et le nombre de perles dans le pot est assez grand pour qu'elle ne soit pas perceptible visuellement. Elle est seulement accessible aux élèves au moyen d'un comptage fastidieux.** L'intervention de l'enseignant est nécessaire dans le cas où l'élève ne mobilise pas la notion de proportion lors de la comparaison des expériences abstraites, ou même, si l'élève ne réussit pas à s'engager dans le processus d'abstraction.

Après cette activité, **l'enseignant fournit aux élèves la répartition réelle des garçons et filles dans le collège, en même temps qu'il rend publique pour la classe les résultats des 50 tirages de chaque binôme**. Cette information introduit une possibilité de contrôle sur les justifications données pour la comparaison entre SC et ER : le rapport entre le nombre de filles (340) et le nombre total d'élèves dans le Collège Plan Menu (708) est très proche de la proportion de perles rouges dans les pots fournis aux élèves.

L'élève peut ainsi contrôler deux comparaisons possibles :

- ✓ La répartition des garçons et filles dans le collège avec les résultats des observations faites lors de l'activité A_1. Cette comparaison met en évidence :
  - la notion d'échantillon aléatoire (on demande à l'élève d'observer un sous-ensemble de la population, pris au hasard) ;
  - la notion de fluctuation d'échantillonnage (on demande aux élèves de constituer plusieurs échantillons de la même population) ;
  - l'appréhension du hasard selon un point de vue statistique (situations potentiellement reproductibles et les divers résultats des observations faites par les divers groupes de la classe, mettant en évidence l'intervention du hasard).
- ✓ La répartition des garçons et filles dans le collège avec les résultats obtenus par la réalisation de l'expérience ER. Cette comparaison met en évidence la notion de simulation comme un moyen économique et efficace pour étudier une situation de la réalité. L'élève n'a pas les connaissances nécessaires pour ce type d'analyse en termes de simulation. Il est donc à la charge de l'enseignant de l'introduire.
- ✓ La répartition des garçons et filles dans le collège avec la composition du pot, obtenue par un comptage des perles. Cette comparaison sert à introduire le pot comme une représentation des expériences semblables à SC : des expériences de Bernoulli qui présentent la même proportion de succès, conformément aux termes développés au paragraphe 4.2 du Chapitre II.

C'est alors l'activité, au moyen de l'intervention de l'enseignant, qui introduit la notion d'urne de Bernoulli, abstraction du pot de perles. Nous qualifions ce modèle de pseudo-concret (cf. Chapitre II). En fournissant aux élèves ce modèle, l'enseignant leur donne un moyen à la fois théorique et lié à une réalité concrète (le pot de perles) de représenter des situations aléatoires de la réalité. Envisager en pensée le pot de perles pour des tirages oblige à considérer la composition de ce pot, ce qui mobilise chez les élèves la conception de pré-probabilité (cf. Chapitre II).

Par rapport aux caractéristiques communes aux expériences SC et ER, identifiées par l'élève pour justifier le processus de comparaison qu'il vient de mettre en œuvre, l'enseignant désigne alors les propriétés qui caractérisent la configuration d'une expérience de Bernoulli : expérience aléatoire à deux issues possibles, succès et échec. Nous attendons aussi qu'il compare la pré-probabilité attachée à chacune des expériences SC et ER, en mettant en évidence la proximité entre les deux valeurs. Il s'agit ici d'un travail sur le choix d'un modèle généré par la coexistence entre les deux approches de la notion de probabilité : l'approche classique ou laplacienne et l'approche fréquentiste ou expérimentale. Ce travail sera poursuivi au cours de la situation didactique suivante, « Urne à Pixels », utilisant un dispositif informatique pour la réalisation d'un très grand nombre de répétitions d'une même expérience aléatoire.

La dernière tâche de cette activité correspond à la question ci-dessous, qui complète la démarche de modélisation envisagée par la situation didactique « Expérience de Bernoulli » :

Quelle urne de Bernoulli proposeriez-vous pour représenter les deux expériences, « *sortie du collège* » et « *le pot de perles* » ?

La démarche de modélisation demandée complète celle déjà entamée lors de la tâche précédente, qui demande la possibilité de remplacer SC par ER puis de faire une association entre les filles et les perler rouges dans le pot par une démarche de comparaison. L'observation de la sortie du collège est équivalente à un tirage au hasard sans remise dans la population constituée par les élèves du collège. Par contre, l'expérience ER consiste à faire 50 tirages au hasard avec remise dans le pot de perles. Pour permettre la comparaison demandée dans cette tâche, on propose d'admettre que pour l'expérience SC il revient presque au même de faire un tirage au hasard avec remise, en identifiant chacun des élèves de façon unique et en utilisant un générateur de hasard quelconque. Nous explicitons dans le schéma qui suit la démarche proposée pour cette question, dans lequel nous identifions les éléments du triangle épistémologique déjà proposé par le schéma 15 :

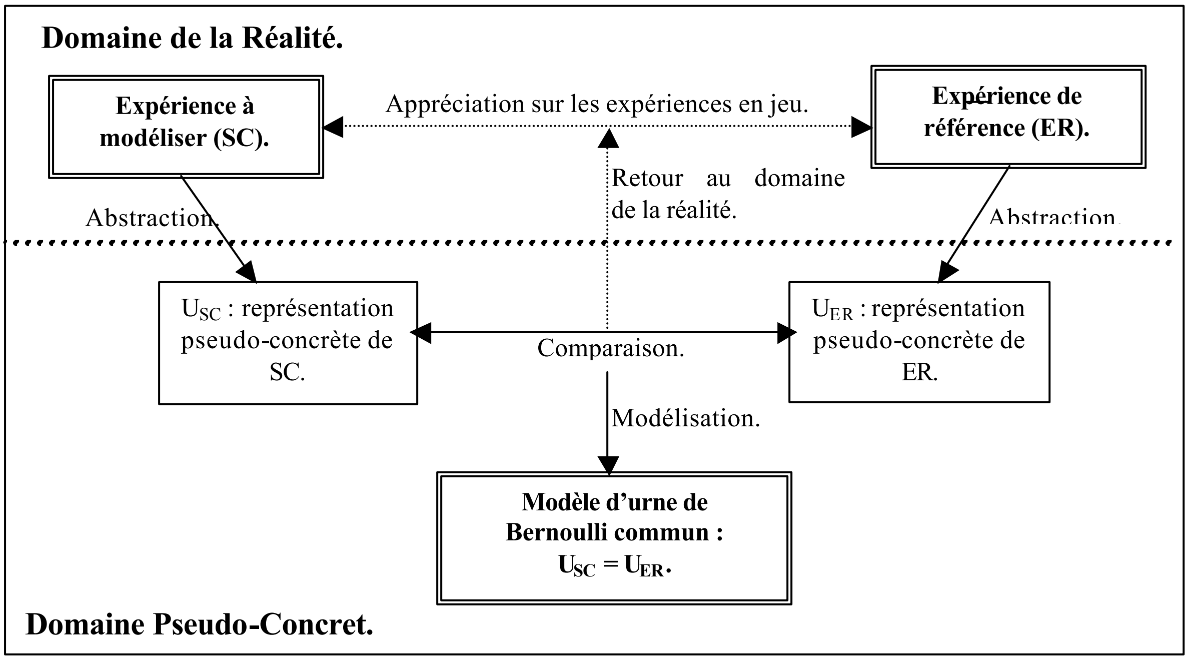


Schéma 16

L'urne de Bernoulli, idéalisée à partir du pot de perles, apparaît ainsi comme un instrument théorique représentatif, en pensée, d'une catégorie donnée d'expériences de Bernoulli : celles qui présentent la même probabilité de succès. Cette probabilité est représentée par la proportion de boules blanches dans l'urne. Cette urne fait apparaître en moyenne les mêmes proportions de succès ou d'échec dans la reproduction un grand nombre de fois du tirage d'une boule au hasard. **Pour les expériences SC et ER, c'est la prise de conscience de la possibilité d'attribuer la même probabilité [(55)] qui permettra la composition d'une urne de Bernoulli pour les représenter.**

Le choix de la composition d'une urne de Bernoulli modèle est alors issu soit d'un comptage des éléments à succès dans le pot, soit d'une estimation de nature fréquentiste faisant appel à une sorte de « loi des grands nombres » en-acte. Cette comparaison étant fixée, les élèves peuvent alors donner la *chance* d'obtenir au hasard une boule blanche d'une urne. Nous interprétons alors ce résultat comme la mobilisation spontanée de la pré-probabilité. ***La reconnaissance de la configuration d'une expérience de Bernoulli est une connaissance introduite par l'activité précédente.*** Cette étape se situe entièrement dans le domaine pseudo-concret.

Remarquons ainsi que cette activité sert à conduire l'élève d'un travail avec les expériences concrètes vers un travail avec les expériences de pensée, en mettant en évidence

[(55)] Autrement dit, mobiliser la conception que nous avons appelé « pré-probabilité » pour attribuer une même valeur à la probabilité d'obtenir un succès lors d'un tirage au hasard dans U_{SC} et U_{ER}.

l'économie apportée par cette abstraction : la simplification de la réalité par la seule prise en charge des propriétés pertinentes à la modélisation. C'est l'activité qui introduit définitivement le domaine pseudo-concret et ses éléments, conformément à ce que nous avons développé au paragraphe 2 du Chapitre II.

La tâche suivante consiste à donner la composition d'une urne de Bernoulli, encore contextualisée et présentée sous la forme d'un pot : les consignes utilisent encore les mots « pot » et « perles » pour désigner l'urne cherchée.

Dans un pot rempli de perles colorées, les perles blanches représentent les « succès » et les noires les «échecs ». Combien de perles de chaque couleur devrait-il y avoir dans ce pot pour qu'on puisse réaliser une simulation des expériences aléatoires ci-dessous :

a) Le jeu de « pile ou face » avec une pièce. Succès : obtenir la position « face ».
b) On choisit *au hasard* un élève dans la classe et on lui demande le jour de son anniversaire en 1999, du lundi au dimanche. Succès : l'anniversaire tombe un « dimanche ».
c) On choisit *au hasard* un élève dans une classe de 18 filles et 12 garçons et l'on observe si on tombe sur un garçon ou sur une fille. Succès : choisir une « fille ».
d) On fait tourner une roulette pour laquelle il y a 5 secteurs de mêmes dimensions dont 3 blancs et 2 rouges. Succès : obtenir un secteur « rouge ».
e) On lance un dé sur une table et l'on veut observer sa face supérieure après immobilisation. Succès : obtenir un « six ».
f) On démarre un chronomètre et l'on demande à une autre personne de dire «stop » pour qu'on l'arrête. On note le chiffre des centièmes de secondes affiché. Succès : obtenir un « multiple de 3 ».

La tâche sert à montrer comment nous pouvons associer quelques situations aléatoires de la réalité, issues de différents contextes, à un tirage *au hasard* dans un pot de perles. Le modèle d'urne de Bernoulli est encore contextualisé (le pot et les perles), mais l'élève réalise l'association demandée en se situant déjà dans le domaine pseudo-concret. Autrement dit, il doit associer chacune des situations proposée par un tirage dans un pot de perles fictif, qu'il manipule seulement par la pensée. Ce pot sert de support à la mise en œuvre du modèle d'urne.

Nous avons alors une activité d'homogénéisation des connaissances dans la classe, nécessaire aux deux situations didactiques qui suivent. Cette homogénéisation est faite par la mobilisation des savoirs introduits par les tâches précédentes : la notion de modèle, ainsi que les notions et le vocabulaire attaché au processus de modélisation. Autrement dit, la régulation est faite par la mobilisation du savoir-faire qui permet à l'élève d'associer un tirage *au hasard* dans un pot de perles à une situation aléatoire de la vie courante, lorsque cette situation est de type « situation de Bernoulli ». Ce pot est alors la première représentation mentale du modèle d'urne de Bernoulli que l'élève se construit.

<u>La résolution attendue</u> de détermination de la composition des pots pour représenter des expériences aléatoires, passe par l'analyse de l'ensemble des issues possibles. Pour chacune des expériences proposées, cet ensemble sera :

Tableau 1

Expérience Aléatoire	**Liste d'issues possibles**	
	Succès	**Échec**
(a)	face	pile
(b)	dimanche	lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi
(c)	fille	garçon
(d)	rouge	blanc
(e)	6	1, 2, 3, 4, 5
(f)	3, 6, 9	1, 2, 4, 5 ,7, 8

La mobilisation de la pré-probabilité doit conduire à la composition adéquate à chaque expérience en jeu. Remarquons que le degré de difficulté lié à cette mobilisation est variable selon l'exemple : l'élève peut associer l'issue « succès » au nombre d'éléments dans la population qui représentent cette issue. Par exemple, pour l'expérience (c) il y a 18 filles dans la classe et pour l'expérience (b) il n'y a qu'un seul dimanche dans la semaine et la population considérée n'est pas les 7 jours de la semaine, mais les 30 élèves de la classe. Alors, une simple lecture de l'ensemble des issues possibles n'est pas suffisante pour donner la bonne composition du pot de perles cherché. Il faut que l'élève associe à chaque événement le nombre d'éléments dans la population qui réalisent cet événement. L'hypothèse d'équiprobabilité qui conditionne la comparaison avec un pot de perles, qui doit ensuite être posée explicitement ou implicitement en acte, doit tenir comte de cette situation.

Le tableau ci-dessous illustre l'association envisagée. Remarquons que pour l'expérience (b) l'élève est confronté à un conflit pour le choix du modèle : le nombre d'éléments qui représentent l'issue « dimanche » change selon l'hypothèse qu'il choisit lors de la construction de ce modèle.

- ✓ La première hypothèse h_1 : on admet que l'élève choisi au hasard est prélevé dans une population très vaste uniformément répartie entre les 7 jours de la semaine, ce qui autorise l'hypothèse selon laquelle tous les jours sont équiprobables.
- ✓ La deuxième hypothèse h_2 : on considère que l'élève est prélevé dans la classe en tant que population. Le nombre d'éléments qui réalisent l'événement « *dimanche* » dépend donc du nombre d'élèves dans **cette classe** pour lesquels l'anniversaire tombe sur un dimanche.

L'introduction de la deuxième hypothèse est faite par l'information donnée par l'enseignant sur le nombre d'élèves dans la classe qui fêtent l'anniversaire un dimanche. Dans le tableau ci-dessous, on suppose pour cette analyse qu'il y a 30 élèves dans la classe. Cependant, nous nous attendons à ce que l'introduction de l'hypothèse h_1 soit d'abord spontanée chez l'élève. Il convient alors à l'enseignant de gérer ce conflit pour choisir le modèle est travailler sur le statut relatif de ce modèle par rapport aux hypothèses que l'on fait pour pouvoir simuler une réalité par un pot de perles : sur quelle population fait-on l'hypothèse d'équiprobabilité ?

Tableau 2

Expérience Aléatoire	**Liste d'issues possibles**			
	Succès		**Échec**	
	issue	**nb**	**issue**	**nb**
(a)	face	1	pile	1
(b-h_1)	dimanche	1	lundi, mardi, ..., samedi	6
(b-h_2)	l'élève qui fête l'anniversaire un dimanche	x	l'élève fête l'anniversaire hors dimanche	30-x
(c)	fille	18	garçon	12
(d)	rouge	2	blanc	3
(e)	6	1	1, 2, 3, 4, 5	5
(f)	3, 6, 9	3	1, 2, 4, 5 ,7, 8	6

Nous faisons alors l'hypothèse que certains élèves **associent chaque élément de la population en jeu à une perle dans le pot** qu'ils doivent utiliser pour simuler chacune des expériences aléatoires. Cela est une conséquence de la possibilité de réaliser ce type d'association, introduite par la question « *si l'on associe les filles aux perles rouges et les garçons aux perles bleues ...* » L'étude de l'ensemble des justifications données par ces élèves à chaque composition permettra de confirmer cette hypothèse. Les compositions attendues selon ce **premier niveau de conceptualisation** [56] des élèves par rapport à la notion de modèle d'urne sont exprimées dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3

Expérience	**Total de perles**	**Total de « blanches »**	**Total de « noires »**
(a)	2	1	1
(b-h_1)	7	1	6
(b-h_2)	30	x	30 - x
(c)	30	18	12
(d)	5	3	2
(e)	6	1	5
(f)	9	3	6

Nous pouvons nous attendre, lors des réponses à cette question, à l'apparition du biais

[56] Caractérisation d'un pot par le nombre de perles de chaque couleur plutôt que par la proportion des perles des deux couleurs qui le composent, révélateur du deuxième niveau de conceptualisation.

d'équiprobabilité chez quelques élèves. Ce biais serait dû à la croyance que si on a "n" issues possibles pour une expérience aléatoire, en absence de toute information ces issues ont la même *chance* $\frac{1}{n}$ d'apparaître. Le fait que l'élève donne la bonne composition du pot ne suffit pas à garantir qu'il ne présente pas ce biais. Prenons par exemple la situation (b). L'élève peut composer le pot à partir d'une hypothèse fondée sur le biais d'équiprobabilité : en absence de toute information, il y a autant de chances pour chaque jour de la semaine. Ce pot aura alors la même composition que le pot constitué à partir de l'hypothèse h_1.

L'objectif de notre ingénierie n'étant pas l'étude des obstacles psychologique présents chez les élèves, nous n'essayerons pas d'aller plus loin sur ce point dans notre analyse. L'analyse a posteriori pourra présenter une étude plus détaillée à ce sujet si ces biais deviennent observables par les stratégies développées par les élèves lors de la solution d'une tâche, ou lors des justifications qu'ils donnent à leurs réponses.

§1.2.3. Connaissances en jeu

Cette activité A_2 permet un réinvestissement des connaissances langagières introduites par l'activité précédente, ainsi qu'un réinvestissement des notions de protocole expérimental, d'issue et d'expérience aléatoire. Elle permet aux élèves de revenir sur la démarche pour dégager les caractéristiques pertinentes permettant la construction d'un modèle, qui se résument ici en deux types :

- ✓ Description précise des succès ou échecs et leurs poids respectifs ;
- ✓ Les conditions dans lesquelles on peut admettre l'équiprobabilité des issues possibles.

Le travail avec le pot de perles induit l'abstraction nécessaire à la démarche de modélisation, en changeant le contexte de l'expérience en jeu. Ainsi, après la décentration et la dépersonnalisation faite lors de l'activité A_1, l'élève est amené à représenter l'expérience SC selon les contraintes introduites par ER : un prélèvement au hasard dans une population.

La fin de cette activité complète la démarche de modélisation que nous voulons installer, en institutionnalisant la notion de probabilité [57] et le modèle d'urne de Bernoulli [58]. Remarquons que l'institutionnalisation de la probabilité prend ici la forme d'une formalisation de la propriété-en-acte utilisée spontanément par les élèves, la pré-probabilité. Cette propriété associe la proportion de boules dans une urne de Bernoulli aux chances

[57] Pour les élèves, l'expression « *chances d'obtenir un succès lors d'un tirage au hasard dans une urne* ».
[58] Pour les élèves, modèle encore contextualisé et exprimé sous la forme « *pot de perles* ».

d'obtenir un succès lors d'un tirage dans cette urne (cf. Chapitre II).

§1.2.4. Conclusion de l'analyse a priori de l'activité A_2

L'analyse de cette activité permet la mise en évidence du caractère introductif de la situation didactique « Expérience de Bernoulli ». Nous ne sommes pas ici devant une situation adidactique, mais plutôt devant une situation didactique introductive préparant la mise en œuvre de la situation C de notre ingénierie, « *le Franc-Carreau* ».

Ainsi, l'activité A_1 permet l'institutionnalisation des notions de *protocole expérimental* et *d'expérience aléatoire*, ainsi que du vocabulaire spécifique lié à ces notions. Cela nous permet la mise en œuvre de l'activité A_2, que nous venons d'analyser.

Dans la suite, les tâches qui composent cette activité A_2 permettent l'introduction des notions de *modèle d'urne de Bernoulli* et de *pré-probabilité.* Ces tâches permettent aussi de compléter la démarche de modélisation proposée par notre ingénierie didactique, ayant un statut de *savoir-faire* nécessaire à la mise en place de la situation didactique suivante, que nous résumons dans le schéma :

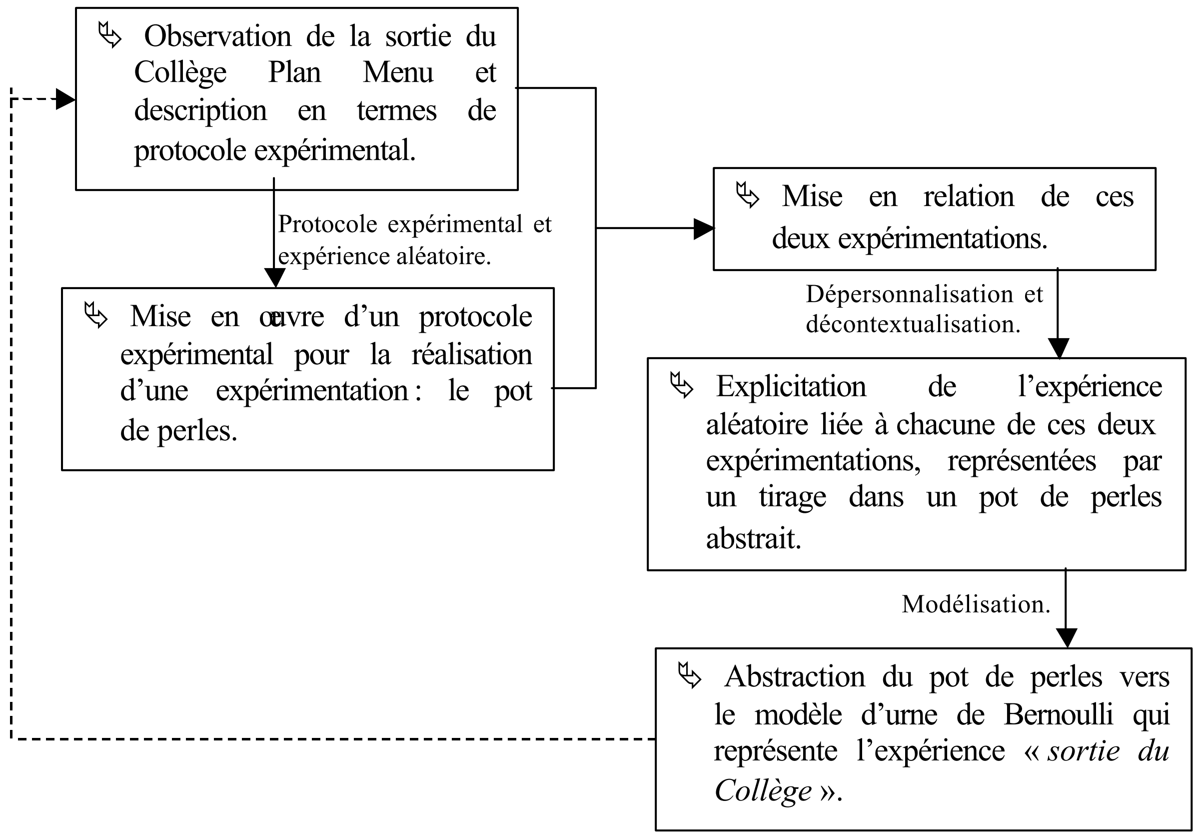


Schéma 17

Nous avons aussi des éléments introduits par des *situations de rappel* (Brousseau, 1995), comme la proportionnalité et la fréquence, connaissances déjà anciennes chez les élèves. La constitution d'un tel milieu potentiel nous autorise la mise en place de la situation didactique B, « *Urne à Pixels* ».

§2. Déroulement et analyse a posteriori des activités qui composent la situation « Expérience de Bernoulli »

§2.1. Activité A_1 : l'aléatoire dans la réalité

§2.1.1. Les questions auxquelles nous voulons répondre

En reprenant notre analyse a priori nous pouvons dégager les questions suivantes, auxquelles nous souhaitons répondre par cette analyse a posteriori :

1) Les élèves font-ils la distinction entre situation aléatoire et situation contingente par l'association avec la notion de reproductibilité (cf. schéma 1, Chapitre I, §1.4) ?
2) Les élèves sont-ils capables de produire un protocole expérimental tel que ceux qui sont utilisés en Sciences comme l'outil de base pour la reproduction d'une expérience aléatoire ?
3) Les élèves sont-ils à même de reconnaître le résultat final d'une expérience donnée comme étant le résultat d'un processus aléatoire ? (reconnaissance de l'intervention du hasard dans le déroulement de l'expérience). En reconnaissant l'intervention du hasard, peuvent-ils construire un critère de classement des résultats possibles en deux modalités possibles, succès-échec ?
4) Les élèves peuvent-ils dégager (et quels outils utilisent-ils dans ce but) les caractéristiques pertinentes pour la modélisation de l'expérience en jeu ? (les caractéristiques qui constituent le domaine de fonctionnement attaché au modèle en construction).

§2.1.2. Le déroulement effectif de l'activité

Caractéristiques des classes observées pendant le déroulement de cette activité :

Tableau 4

		Classe de Troisième	Classe de Seconde
Observation de la sortie du parking et de la sortie du collège.		Effective, comme activité préalable.	Évoquée par la consigne.
Organisation de la classe pour la phase collective.		Groupes.	Binômes.
Formulation écrite des exemples de situations aléatoires		Groupes.	Individuellement.
Communication des descriptions faites pour chacune des expériences, parking et collège, et communication des exemples.		Affiches construites par chaque groupe.	Lecture par l'enseignant des fiches individuelles rendues par les élèves lors de la séance précédente.
Mise en commun		Débat collectif.	Débat collectif.
Chronologie	**Activité A_1**	Première séance : 2 heures. Deuxième séance : 30 min.	Première partie de la première séance : 30 min.
	Activité A_2	Deuxième séance : 30 min.	Deuxième partie de la première séance : 45 min.

En conséquence des choix explicités par le tableau ci-dessus, ainsi que de la différence de gestion des deux enseignants, nous avons deux groupes avec des caractéristiques distinctes. Nous ferons alors la description du déroulement effectif de l'activité en respectant les caractéristiques de chacun des groupes.

<u>Premier Groupe : Classe de Troisième.</u>

La séance commence par l'organisation de la classe en groupes et par l'explication des consignes par l'enseignant. Les élèves sont déjà engagés dans le travail car, pendant la semaine qui a précédé le cours, ils ont eu l'activité préalable suivante :

> 1) Proposez 2 exemples de situations que vous avez rencontrés dans lesquelles le hasard intervient. Proposez au moins une situation qui ne soit pas un jeu de hasard. Faites ces propositions par écrit.
> 2) En se plaçant en tant qu'observateur, faites une description des situations présentées ci-dessous.
> <u>Situation 1</u> : Observez les voitures qui sont dans un parking d'une grande surface. Parmi elles, il y en a des rouges. Peut-on savoir d'avance si la première voiture qui va sortir du parking sera rouge ? Pour avoir une idée sur la proportion de voitures rouges parmi l'ensemble du parking, notez le nombre de voitures rouges qui sortent du parking parmi les 10 premières. Répétez cette expérience plusieurs fois.
> <u>Situation 2</u> : On désire avoir une indication sur la proportion des filles parmi les élèves du collège. Pour cela, notez le nombre des filles parmi les 25 premiers élèves qui sortent du collège après la fin d'un cours. Recommencez cette observation plusieurs fois et préparez votre compte rendu.

Les consignes données par l'enseignant ont ainsi pour but d'inciter la communication des exemples que les élèves ont formulés, ainsi que la description des situations qu'ils ont pu observer. Pour ce groupe, l'enseignant propose la confection d'affiches contenant la réponse aux questions suivantes, écrites au tableau :

1. Données relevées : parking →
   collège →
2. Décrire les conditions de ces 2 expériences.
3. Situations où le hasard intervient.
   Définition du hasard.

L'enseignant accorde aux élèves un temps de 25 minutes pour la confection des affiches, et ils peuvent choisir l'ordre selon lequel ils veulent répondre aux items proposés.

Remarquons d'abord que l'enseignant a choisi d'inverser l'ordre des questions proposées par l'activité préalable, en proposant d'abord un travail de dépouillement des observations faites pour, ensuite, proposer la communication des exemples que les élèves ont rédigés. Nous étudierons l'effet de ce changement sur la façon dont les élèves vont rendre publique leur appréhension du hasard.

Nous remarquons aussi que les consignes données au tableau commencent par une quantification : quelle proportion ont-ils observée lors de chaque expérimentation ? Cette introduction à l'activité par la quantification peut engendrer une valorisation de cet aspect, ce que nous n'avions pas souhaité comme point de départ pour l'apprentissage de la modélisation. Rappelons que notre ingénierie didactique vise surtout une appréhension qualitative des situations aléatoires.

Question 1 : Les exemples de situations aléatoires.

La majorité des groupes a commencé le travail par un débat sur les situations hasardeuses. Cela pourrait être un effet de contrat relatif aux consignes données dans l'activité préalable, qu'ils avaient tous en main.

La consigne donnée précise qu'au moins un, parmi les deux exemples, ne doit pas être un jeu de hasard. Conformément à notre analyse a priori, les élèves proposèrent davantage des situations contingentes : situations avec composante d'incertitude, mais formulées selon un point de vue du personnel. Autrement dit, les élèves particularisent la situation, sans essayer de la placer comme appartenant à une catégorie de situations semblables.

Citons les exemples rédigés sur les affiches par les groupes [59] :

> G1 : rencontre dans la rue d'une personne qu'on connaît, la couleur des yeux, accident.
>
> G2 : Jeux à gratter ; jeux de hasard tel que le flipper ; dans les sports, le foot il peut y avoir de la réussite de la chance ou de la malchance ; le loto ; la météo ; répartition des classes ; l'humeur.
>
> G3 : Nicolas a rencontré le prof d'espagnol dans la salle d'attente de l'orthodontiste ; Nino, un rottweiller, courait après Rudy, un berger des Pyrénées, le hasard a fait que Okland, le chien de Camille, se trouvait sur le chemin et a empêché que Nino finisse sa course car Nino et Okland s'entendent bien.
>
> G4 : Lotos, jeux de Casino, jeux de grattage, feux tricolores, professeurs malades, pile ou face, passage à la récitation de poésies, la météo.
>
> G6 : Par exemple, quand un élève est interrogé à l'oral par un professeur ; quand on rencontre un ami dans la rue ou en vacances ; quand on gagne aux jeux de hasard (millionnaire, …)

Notons que les élèves n'essaient pas de distinguer les contextes « *jeu de hasard* » et « *vie courante* », alors que cela leur était demandé. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

Lors du choix des exemples à mettre sur l'affiche, le débat intragroupe montre que ces élèves cherchent leurs situations aléatoires en partant d'une description d'un fait qu'ils ont vécu. Pour l'exemple « *professeurs malades* », nous pouvons citer une phrase qui caractérise bien cette recherche par la personnalisation du fait :

> Élève de G4 : Avec un prof normal, oui. Avec elle, non…

La remarque de cet élève montre bien qu'il pense à un enseignant précis au moment de formuler son exemple sur l'absence d'un enseignant due à une maladie.

Le fait d'écrire « *professeurs malades* » peut indiquer soit un passage intuitif au point de vue statistique, soit l'utilisation d'une étiquette pour désigner l'exemple qu'ils veulent exprimer. L'analyse du dialogue intragroupe et de l'affiche qu'ils ont rédigée nous montre que ce changement de formulation est une constante lors du passage du langage oral au langage écrit. Citons aussi l'exemple « *feux tricolores* ». Le débat commence pour présenter une situation personnelle de l'élève qui formule l'exemple :

> Élève de G4 : je passe en voiture par un feu et le hasard fait qu'il change au "vert".

Notons que pour ces élèves, la simple expression « *feux tricolores* » peut renvoyer à la situation décrite : le changement de couleur lorsqu'une voiture arrive à un feu. Cela nous conduit à conjecture qu'il s'agit plutôt d'un étiquetage de la situation, qu'un passage au point de vue statistique. Le niveau de difficulté pour effectuer ce changement de point de vue lors des prochaines activités pourra valider ou bien réfuter cette conjecture. Citons la rédaction des exemples des groupes G1 et G6, pouvant indiquer déjà une dépersonnalisation et une généralisation ou un étiquetage de la situation.

Les affiches rédigées par les groupes confirment une proportion assez importante

---

[59] Le groupe G5 n'a pas fourni d'exemple.

d'exemples construits à partir de situations de rencontres fortuites ou d'autres situations issues de leur vécu, formulés selon un point de vue personnalisé, conformément à notre analyse a priori. Les échanges intragroupes montrent un décalage entre les formulations orales de ces exemples et leurs formulations écrites qui peuvent sembler plus générales mais en même temps contiennent de nombreux implicites. Seule la situation est étiquetée, l'expérience est rarement mentionnée, les résultats non plus. Le tableau ci-dessous illustre les parties constitutives des descriptions données par les groupes.

Tableau 5

	Expérience mentionnée.	**Dépersonnalisation**	**Personnalisation**	**Résultat mentionné.**	**Étiquette de la situation.**
G1	X	X		X	X
G2		X		X	X
G3			X	X	
G4		X			X
G6	X	X		X	

Remarquons que les groupes G1, G2, G3 et G6 caractérisent l'expérience par son résultat : la couleur des yeux, on gagne les jeux de hasard. Cependant, ce type de caractérisation n'est pas stable. Nous remarquons que les groupes G1 et G6 utilisent aussi l'identification de l'expérience pour rédiger leurs exemples fondés sur une situation de rencontre : rencontre dans la rue d'une personne qu'on connaît. G1 utilise aussi l'étiquetage pour la rédaction de leur dernier exemple : accident.

Nous pouvons aussi dégager du tableau ci-dessus que les groupes qui utilisent l'étiquetage pour désigner l'exemple de situation aléatoire qu'ils ont imaginé ne personnalisent pas leurs exemples (G1, G2 et G4). Cette dépersonnalisation est plus remarquable dans les exemples donnés par les groupes G1 et G2, qui utilisent à la fois l'étiquette et le résultat pour désigner la situation en jeu.

Nous pouvons identifier quelques appréhensions du hasard liées aux croyances (association entre hasard et chance ou malchance) ou à des phénomènes que nous ne pouvons pas maîtriser complètement (météo, avalanche, accidents). Lors de la mise en commun, les justifications données par les groupes nous confirment l'existence de ces types d'appréhensions. Ces justifications ne sont pas spontanées, mais provoquées par la réponse à la dernière question, «*définition du hasard* ». Pour la totalité des groupes, le hasard est lié à l'imprévisibilité et à l'impossibilité de contrôle. Les définitions données expriment toutes ces idées de base.

La demande de formuler une telle définition conduit les élèves à une réflexion sur les effets possibles du hasard, ou encore sur le hasard comme étant à la source d'un fait observé, mais dont ils n'arrivent pas à expliquer l'origine. Citons l'exemple de la météo, proposé par écrit par deux groupes mais évoqué par la presque totalité des groupes lors des discussions pour la préparation des affiches. La discussion intergroupes présente les arguments suivants :

> Élève G4 : la météo c'est pas du hasard…
>
> Élève G3 : ils peuvent prévoir, mais ils ne sont pas sûrs…
>
> Élève G1 : dans toutes les situations il y a du hasard et de la logique …
>
> Prof : Peut-on faire des catégories de hasard ?
>
> Élève G4 : hasard à 100 % ou plusieurs catégories : jeux, rencontrer quelqu'un qu'on connaît …

Nous remarquons qu'en excluant les jeux, admis pour tous les élèves comme un exemple de situation dans laquelle il y a l'intervention du hasard, ils associent le hasard aux situations d'incertitude sans distinguer entre les situations contingentes et les situations aléatoires [(60)].

Question 2 : Les observations des élèves.

Nous pouvons constater que la formulation de la consigne donnée au tableau (demande préalable d'écrire des quantités relevées avant la description des conditions) a entraîné une certaine difficulté pour que les élèves puissent dégager la notion de protocole expérimental [(61)]. Cela vient du fait que les élèves ont quelque difficulté pour dégager les caractéristiques pertinentes de la situation : ils sont plutôt attachés aux quantités observées comme résultat de l'expérimentation qu'aux aspects qualitatifs qui identifient la situation en jeu comme appartenant à une certaine catégorie de situations semblables.

Nous remarquons aussi que les consignes données au tableau, ainsi que les consignes données par écrit comme activité préalable, ne demandent pas aux élèves de valider la description de l'expérimentation faite. La consigne préalable demande aux élèves « *en se plaçant en tant qu'observateur, faites une description des situations présentées ci-dessous* ». On demandait ainsi aux élèves la construction d'un protocole « spontané » : un *protocole expérimental dans le domaine du hasard*. Nous constatons l'absence, soit dans le milieu constitué pour l'apprentissage de cette notion de protocole envisagée, soit dans le contrat didactique, d'éléments pour rendre publiques les méthodes utilisées par les groupes pour construire et valider leur construction.

Malgré cela, nous pouvons dégager de leurs descriptions qu'ils n'ont pas mobilisé des

---

(60) Nous reprenons ici la distinction entre situation contingente et situation aléatoire que nous avons présentés au chapitre I.

(61) Description opératoire d'une expérience aléatoire, prenant la forme d'une liste de consignes précises et suffisantes, qui permet de réaliser cette expérience et de s'accorder sur le fait que l'expérience ainsi décrite est bien reproduite. (cf. §3.2 du Chapitre II).

connaissances sur la notion de «*protocole expérimental* » qui font partie des programmes de Sciences Physiques. Un indice de cette absence de mobilisation est la structuration qu'ils donnent à leur description, qui diffère de celle qui est utilisée en Sciences Physiques, illustrée dans notre Chapitre II.

Cette association entre « *décrire l'observation faite* » et « *le protocole expérimental utilisé en Sciences Physiques* » était alors une rétroaction attendue, conformément à notre analyse a priori, et qui n'a pas eu lieu.

Pour bien montrer cette différence de structuration entre les deux types de protocoles, donnons les descriptions présentées par les groupes avant intervention de l'enseignant :

> G1 : Parking : je me suis installée à la sortie d'un parking et j'ai compté le nombre de voitures rouges, parmi les 10 premières voitures sorties.
> Collège : j'ai attendu devant le portail du collège et j'ai compté le nombre de filles parmi les 25 premiers élèves sortis.
>
> G2 : Nous sommes allés au parking de Champion après le cours. On y est resté 50 minutes et nous avons réalisé 3 fois l'expérience. Nous nous sommes placés 3 à l'entrée et 3 devant le magasin.
>
> G3 : Parking : à la fin de cours, mercredi à 12h15, Nicolas et Vincent sont allés au Parking Champion et ont attendu que 10 voitures sortent, et ont compté celles qui étaient rouges. Le lendemain, à la même heure, ils ont répété l'expérience de mercredi.
> Collège : Camille, à 12h, a compté sur 25 personnes le nombre de filles qui sortaient. À 17h Camille, Alexia et Sabrina ont répété la même expérience qu'à midi.
>
> G4 : Parking : parking enneigé ; les voitures sont comptées à la sortie du parking.
> Collège : les élèves sont comptés à la sortie du collège.
>
> G5 : Parking : Champion, 18h37 (38"), sous la neige.
> Collège : 9h02, en étude. Pion : Vincent.
>
> G6 : Parking : parking de la mairie de Crossey à 18h00, jeudi 4 mars pour les 2/10 et 0/10 voitures rouges. Parking du Polychrome, lundi 1 mars à 18h30 pour les 3/10 voitures rouges.
> Collège : lundi 1/03 à 16h00 pour 13/25 ; jeudi 4/03 à 12h00 pour 10/25 et mardi 2/03 à 17h00 pour 11/25.

Pour répondre à la question posée au tableau sur les données relevés, les élèves donnent simplement les valeurs, sans aucune précision ou justification, mais l'enseignant ne revient pas sur ces données tout de suite. Il travaille davantage sur la notion de protocole expérimental comme outil pour introduire la notion d'expérience aléatoire, enjeu de l'activité. Le tableau ci-dessous illustre les parties constitutives des descriptions données par les groupes. Dans ce tableau, SP désigne l'expérience « sortie du parking » et SC désigne l'expérience « sortie du collège ».

Tableau 6

	Lieu		**Expérience**		**Description personnalisée (j'ai observé…)**		**Quantités observées**		**Date/Durée**		**Répétition**		**Indication sur le nombre d'élèves observateurs**	
	SP	**SC**	**SP**	**SC**	**SP**	**SC**	**SP**	**SC**	**SP**	**SC**	**SP**	**SC**	**SP**	**SC**
G1		X	X	X	X	X								
G2	X								X		X		X	
G3	X		X	X	X	X			X	X	X	X	X	X
G4		X												
G5	X								X	X				
G6	X						X	X	X	X	X	X		

L'analyse des échanges intragroupes ne nous permet pas de dégager s'il y a eu des rétroactions du milieu prévu pour cette activité et leurs effets. Même s'ils ont formulé la description demandée, il nous semble qu'ils restent dans une phase d'action, sans chercher à formuler et à valider cette action. La formulation de la consigne est probablement en cause : on leur demande de décrire en tant qu'observateurs. Si la demande avait été « décrire la situation comme une expérience à reproduire », l'énoncé lui-même aurait sans doute renvoyé à la notion d'expérience telle que celle utilisée en Sciences Physiques, ainsi qu'au besoin de valider ce type de description.

Bilan collectif des affiches contentant les observations.

Dans un premier temps, l'enseignant essaie de conduire les élèves à reconnaître la situation « sortie du parking » comme une situation reproductible, selon le type de hasard qui intervient.

> Prof : Est-ce que l'on peut faire de catégories du hasard … sont tous à peu près le même ou est-ce qu'on peut faire des catégories ? Est-ce que tous les exemples que vous avez choisis sont de même type de hasard ou pas ?
>
> Élève : il y a plusieurs catégories parce qu'il y en a un pour les jeux, pour qu'on gagne de l'argent, ou rencontrer un professeur ou une personne qu'on connaît dans la rue, euh…
>
> Prof : oui, vas-y …
>
> Élève : bah, il y a plusieurs catégories parce que … euh… il y en a une par exemple les jeux quand on gagne l'argent et il y en a une autre quand on rencontre quelqu'un dans la rue…
>
> Prof : quelqu'un qu'on connaît dans la rue tu le vois différent par rapport à un jeu ?
>
> Élève : ouais…
>
> Prof : L'exemple du parking, c'est du type de ce que tu viens de dire, c'est-à-dire, du jeu ?
>
> Plusieurs élèves : Non, c'est pas un jeu …
>
> Prof : C'est un hasard qui se rapproche du hasard « jeu » ou c'est un hasard qui se rapproche du hasard … euh…
>
> Élève : Du jeu…

Nous pouvons observer que les élèves proposent des catégories des situations de hasard selon leur contexte. Le débat continue par la recherche d'une argumentation pour classer l'expérience « sortie du parking » selon un type de hasard. L'enseignant entreprend alors une recherche de similitudes entre cette expérience et celles qui sont dans un contexte de jeux de hasard. Les élèves ne semblent pas entrer dans la distinction attendue malgré les tentatives de l'enseignant.

Revenant au projet d'enseignement, c'est-à-dire, revenant à l'intention d'introduire la notion de protocole expérimental et, dans la suite, la notion d'expérience aléatoire, l'enseignant passe immédiatement après ce débat à la recherche des caractéristiques pertinentes de la situation. Il revient alors à la consigne « décrire la situation », en explicitant que les élèves doivent rechercher les caractéristiques qui permettent de reconnaître la situation envisagée par une liste de consignes. Ce projet d'enseignement est rendu explicite par la remarque de l'enseignant lorsque les élèves commencent à lire les descriptions faites :

> Prof : on va voir si elles ont la même structure …Est-ce que les descriptions sont les mêmes ou sont à peu près … ou ne sont pas les mêmes … c'est donc la même consigne qui a été donnée … est-ce que la description est la même ?

L'enseignant intervient dans le débat en faisant la comparaison entre les descriptions que les élèves viennent de lire pour en dégager les précisions introduites par quelques groupes, comme le nom du parking choisi, l'heure de l'observation. Lors de cette intervention, il introduit aussi l'objectif de la description comme un moyen de reproduire la même expérience. On peut noter que cet objectif apparaît relativement tard.

> Prof : Frédéric vient de dire « on a compté … hop… ». Et puis, par exemple, si je prends le groupe de Florence, là-bas, ils ont rajouté des choses. Par exemple, ils ont dit par exemple si c'était le parking de Champion, si c'était l'heure, etcetera,… Ce que je veux savoir c'est, si cette expérience on veut la recommencer, on va la reproduire, est-ce que je dois aller dans le sens de ce que nous dit Florence, ou dans le sens de ce que nous donne Frédéric ou d'autre chose ? Est-ce qu'on doit préciser le nom du parking, est-ce qu'on doit préciser la date, ou quelque chose qu'on a pas pensé ?

La question de l'enseignant ne porte pas sur la pertinence des propriétés caractéristiques de l'expérience mais sur une comparaison des caractéristiques fournies par les descriptions des élèves. Revenus en groupe, les élèves ne se posent donc pas la question de la pertinence des éléments de leur description. Les précisions qu'ils apportent aux consignes portent d'abord sur une précision du parking, car une promotion dans une grande surface peut provoquer un plus grand nombre de voitures que dans un autre parking. Elles portent aussi sur la précision du moment de l'observation et sur le nombre de voitures dans le parking. On remarque que les élèves sont attachés au résultat quantitatif, en l'associant au nombre de voitures dans le parking, et non à la proportion de voitures rouges. Leurs justifications pour cette association :

Élève : S'il y a plus de voitures, il aura plus de voitures rouges.

Mais surtout, ces remarques des élèves qui conduisent à une inflation de précisions sur la situation, ne dégagent pas le processus expérimental de la situation. Nous voulons dire par là que les élèves ne comprennent pas que seules importent dans la situation les caractéristiques pertinentes par rapport à l'expérience en jeu, les conditions dans lesquelles se déroule l'expérimentation. Alors, la demande de l'enseignant d'une description dont le but est de reproduire l'expérience n'a pas conduit au résultat envisagé. L'enseignant introduit alors l'expression « critères pertinents pour établir une expérience ». Il renvoie ainsi au choix des éléments qui constitueront le domaine de fonctionnement attaché au modèle en construction.

L'enseignant revient alors sur les descriptions faites pour dégager les critères par lesquels ils peuvent s'accorder sur la reproduction de la même expérience. Il cite comme exemple la couleur de la voiture : comment les élèves peuvent-ils se mettre d'accord pour dire qu'une voiture sortante est rouge ? Cette phase est menée très rapidement.

Une deuxième phase dans l'activité est déclanchée par la question posée par l'enseignant :

Est-il possible de décrire les situations (parking et collège) comme une expérience où l'on tire au hasard dans un ensemble d'objets ?

Remarquons tout d'abord un changement dans la formulation présentée dans notre analyse a priori : « *est-il possible de représenter les exemples que vous avez proposé et les situations 1 et 2 par un prélèvement au hasard dans une population ?* » Ce changement, choix de l'enseignant, a eu pour objectif de minimiser les difficultés dues à l'utilisation d'une nouvelle expression, *prélèvement au hasard*. Cette expression est alors introduite comme un « vocabulaire scientifique » pour exprimer un « *tirage au hasard* », expression du langage courant, lors de l'institutionnalisation. Par contre, l'usage du terme « *population* » pour exprimer l'ensemble des objets dans lequel on réalise le tirage se révèle assez problématique pendant le déroulement de l'activité. Nous faisons la conjecture que cette difficulté est une conséquence de l'usage de ce terme dans le sens du langage courant, car il n'a jamais été défini, mais introduit par ostension depuis la classe de 6^{e} en Collège (cf. analyse a priori). L'action d'interpréter un ensemble de voitures comme une population devient ainsi une tâche problématique pour les élèves, une tâche qui provoque un blocage chez certains groupes de la classe. On peut en inférer que les chapitres d'« organisation et gestion de données », introduits dans les classes antérieures, n'ont pas eu suffisamment d'impact sur l'acquisition de cette notion.

L'intervention de l'enseignant est alors nécessaire. Il reformule l'expérience du parking en demandant aux élèves de changer le point de vue :

> Prof : Imaginez le parking comme un grand bocal d'où sortent les voitures.

Cette image qui associe la sortie du parking à un instrument de tirage au sort connu par les élèves (image d'un tirage au Loto) provoque une réinterprétation du problème leur permettant d'avancer dans la recherche de la description demandée par la consigne.

L'usage du mot «choisir au hasard» provoque aussi un blocage. Pour les élèves, l'action de choisir une voiture ou un élève élimine l'intervention du hasard puisque l'objet en jeu est choisi. Une nouvelle intervention de l'enseignant renvoyant à nouveau sur l'image du bocal, permet aux élèves d'interpréter la sortie du parking et la sortie du collège comme un tirage semblable à celui du Loto.

Ce débat conduit à une nouvelle formulation de cette description par les élèves :

> G1 : Les voitures et les élèves sortent au hasard.
> Parking : la voiture doit être complètement rouge pour être comptée ; la météo ne joue pas sur le nombre de voitures dans le parking ; la taille du parking n'a pas d'influence sur la proportion de voitures rouges sur les 10 premières voitures.
> Collège : la météo ne joue pas sur le nombre d'élèves qui sortent.
>
> G2 : Il faut que la voiture soit entièrement rouge. Et que toutes les autres couleurs qui font partie du rouge (rouge-bordeaux, …) soient comptées dans la catégorie rouge. Le temps, la marque X du magasin ne contribue pas à la couleur de la voiture mais au nombre de voitures. L'emplacement et le prix, le jour et l'heure.
>
> G3 : Parking : pour faire l'expérience, aller dans une grande surface, compter le nombre de voitures entièrement rouge et de tout les rouges possibles. Dans les dix premières voitures qui sortent compter le nombre d'entre elles qui sont rouges et ne pas compter celles qui arrivent entre temps.
> Collège : se placer devant le portail et compter sur 25 personnes qui sortent en fin de cours.
>
> G4 : Parking : carrosserie intégralement peinte de tous types de rouge ; observer les voitures sur un parking public qui contient plus de 10 voitures.
> Collège : participation des profs pour sortir suffisamment tôt ; se placer à la sortie de l'agora du collège de Coublevie.
>
> G5 : La taille du parking (nombre de places) ; voitures 100 % rouge, emplacement de magasins, heure et date.
>
> G6 : Parking : il faut aller dans un parking de grande ou petite surface. La grandeur et l'heure n'a pas d'importance pour le pourcentage de voitures rouges. Il faut compter 10 voitures et prendre le nombre de voitures rouges. Le rose n'est pas compté comme voiture rouge alors que le bordeaux oui.

Nous pouvons remarquer que les élèves n'ont pas encore maîtrisé la signification de la recherche de caractéristiques pertinentes. Autrement dit, ils n'ont pas dégagé les propriétés qui suffisent à caractériser l'expérience. Ils gardent comme description les exemples signalés par l'enseignant pendant son intervention, souvent sous forme négative : le rôle de la météo (la météo ne joue pas), la taille du parking et la possibilité d'avoir différentes tonalités de rouge (le rose n'est pas compté).

L'enseignant essaie de traduire le protocole expérimental comme étant la «règle du jeu» pour la mise en œuvre de l'expérience, sans que cela produise le résultat attendu : la rédaction d'un protocole expérimental. Une formulation de l'énoncé en termes de « description des gestes faits pour la mise en œuvre de l'expérimentation », tel que nous la trouvons chez Fontana & Bernard (2000), pourrait avoir déclanché cette action par l'accent mis sur les gestes. Autrement dit, les élèves pourraient rédiger le protocole expérimental à partir de la reconnaissance des caractéristiques pertinentes pour la reproduction de l'expérience de façon moins problématique.

Les connaissances « protocole expérimental » et « expérience », introduites en Sciences Physiques depuis le début du Collège, ne sont pas stables, et donc, sont absentes du milieu prévu pour cette activité. Il n'existent donc pas de rétroactions du milieu. Les élèves ne reconnaissent pas l'observation de la sortie du parking et de la sortie du collège comme un processus expérimental. La description qu'ils fournissent reste alors, pour la plupart de ces élèves, en termes de description des faits observés. Si nous distinguons deux phases dans une expérience qui sont sa mise en œuvre et l'observation des résultats, nous remarquons que les élèves ont tendance à passer directement à la deuxième phase. Cela a comme conséquence une prise de position plutôt quantitative, en laissant les caractéristiques qualitatives de ces résultats dans un plan secondaire. Citons l'exemple des descriptions fournies par les groupes G3, G4 et G6, présentées plus haut.

La conséquence la plus importante du point de vue de la **connaissance en jeu** est que les élèves n'ont pas pris conscience de l'expérience en jeu. Par conséquent, ils ne peuvent pas reconnaître le **protocole expérimental** comme solution optimale pour décrire une expérience de façon opératoire afin de permettre sa reproduction. L'enseignant intervient alors pour rendre possible cet apprentissage. Il introduit, explicitement, les éléments qui constituent un protocole expérimental, sous la forme d'un transparent que nous reproduisons ci-dessous.

Le protocole expérimental : il doit contenir l'objet de l'observation, les conditions dans lesquelles on fait l'expérimentation, les critères pour le classement des objets observés et les résultats possibles de l'expérimentation observée.

- L'objet de l'observation : on désire avoir une indication sur la proportion des filles parmi les élèves du collège.
- L'expérimentation : après la fin d'un cours, noter le nombre de filles parmi les 25 premiers élèves qui sortent du collège à partir du début de l'observation ;
- Les conditions de l'expérimentation :
  - On se place devant le portail du collège « Plan Menu » à Coublevie, avant la fin d'un cours ;
  - On décide de démarrer l'observation à partir d'un instant précis ;
  - On note le nombre de filles parmi les 25 premiers élèves qui sortent du collège après le début de l'observation.

L'enseignant fait remarquer aussi que le résultat qui intéresse pour cette expérience est d'observer si l'élève sortant est un garçon ou une fille : il induit alors la liste des issues possibles pour l'expérience aléatoire « sortie du collège ». L'institutionnalisation porte alors sur la notion d'*expérience aléatoire* : à partir des productions, l'enseignant arrive à la formulation d'une définition d'expérience aléatoire dans un dialogue avec les élèves dans lequel il induit les réponses attendues. L'enseignant fait appel d'abord aux différents types d'expériences qui ont été travaillées pendant l'activité : les jeux, les rencontres, le parking et la sortie du collège. Ensuite, il évoque les expériences menées par les élèves pendant les cours de Sciences Physiques et Biologie. L'expérience aléatoire est alors présentée comme une expérience dans le déroulement de laquelle le hasard intervient.

La reproductibilité est institutionnalisée en liaison avec la possibilité de décrire l'expérience par un protocole expérimental (décrit au tableau comme *la règle du jeu*). Nous remarquons que l'institutionnalisation devient, dans cette activité, l'outil de validation pour les connaissances acquises. Du fait que les élèves n'ont pas interagi avec le milieu prévu pour l'activité qui devrait faire mobiliser les critères de validité, l'institutionnalisation faite par l'enseignant devient la seule validation possible : une validation externe.

Deuxième Groupe : Classe de Seconde.

La séance commence déjà par la mise en commun des activités préalables, pour lesquelles les élèves ont eu la consigne suivante :

a) Imaginez que vous êtes à la sortie du parking d'une grande surface, et que vous voulez avoir une idée de la proportion de voitures rouges dans l'ensemble de voitures qui sont garées dans ce parking, sans compter toutes les voitures parce qu'il y a en trop. Peut-on savoir d'avance si la première voiture qui va sortir du parking sera rouge ?

Les élèves pouvaient répondre « oui », « non » ou « je ne sais pas », mais on leur demandait de justifier leur réponse. Remarquons que cette consigne est complètement différente de celle qui a été proposée pour le premier groupe. La reformulation de l'énoncé visait à mettre les élèves en situation de réalisation évoquée d'une expérimentation (imaginez que vous êtes à la sortie du parking…) ainsi que de mettre en évidence l'expérience attachée à la situation en jeu. Cette mise en évidence était envisagée par la question « peut-on savoir d'avance si la première voiture qui va sortir du parking sera rouge ? » Vingt-sept élèves sur les trente qui participaient de la séquence didactique ont bien identifié l'intervention du hasard dans cette situation. Le tableau ci-dessous contient les réponses écrites données par les élèves.

Tableau 7 : réponses données par les élèves sur la fiche rendue à l'enseignant

Oui (O), Non(N), je ne sais pas (?)	Justification
N	On ne peut pas savoir si la première voiture qui sortira du parking sera rouge, sauf si 100 % des voitures sont rouges ou qu'aucune des voitures dans le parking n'est rouge. Mais à part ces deux solutions, on ne peut savoir d'avance si la première voiture qui sortira sera rouge ou non.
	Si, en regardant l'ensemble des voitures sur le parking, je remarque une grande majorité de rouges, je peux supposer que la première voiture qui sortira sera une rouge.
N	Cela est une question de hasard.
?	Je ne sais pas si la première voiture sera rouge, je ne peux pas deviner. Ou alors ce sera le hasard.
N	On ne peut pas le savoir à l'avance, sauf s'il n'y a que des voitures rouges. C'est une question de hasard.
N	
N	Car c'est le hasard, car tous les gens avec une voiture rouge ne vont pas tous ce précipiter à la sortie du parking.
N	C'est le hasard qui dira si la première voiture sera rouge.
N	Il y a un certain nombre de chances que la première voiture soit rouge mais on ne peut pas être sûr.
?	
N	Sans idée de proportion, il me paraît impossible de savoir si la voiture sera rouge ou non.
N	Car même si la majorité des voitures est de couleur rouge, on ne peut pas être certain que la voiture qui sortira la première sera rouge.
N	Je pense que c'est le hasard qui fait qu'on tombera ou non sur une voiture rouge. Par contre, si toutes les voitures sont rouges (cas peu probable), il est évident que la première qui sortira le sera.
N	On ne peut que nommer un pourcentage de vraisemblance.
N	Non, on ne peut pas savoir si la première voiture qui va sortir du parking sera rouge, mais on peut le supposer si la plupart des voitures garés dans ce parking sont rouges.
N	C'est le hasard.
N	On ne peut pas savoir puisque seul le hasard intervient.
N	On ne sait pas car c'est le hasard qui décidera de la couleur de la première voiture qui sortira car il y a plusieurs couleurs de voiture et le rouge n'est peut-être pas la couleur la plus répandue.
N	On ne peut pas savoir mais on peut penser qu'il a une probabilité suffisamment importante pour que la voiture soit roue, mais elle pourra aussi être verte.
N	Car il y a plusieurs couleurs de voitures dans le parking.
N	Car le nombre de voitures est trop important. À part si le hasard rentre en compte.
?	On en sait rien parce que si il y a une majorité de voitures rouges ce n'est pour cela que la première voiture à sortir sera rouge.
N	On ne peut pas savoir si la prochaine voiture sera rouge sauf si c'est une coï ncidence.
N	Car c'est le hasard.
N	Non, car cela est du hasard. Il peut très bien avoir 2000 voitures rouges dans un parking et une verte, et que la verte sorte comme ça au moment où on regarde.
N	N'importe quelle voiture peut sortir du parking. C'est le hasard.
N	On peut pas savoir d'avance si ça va être une voiture rouge que va sortir la première, à moins d'avoir la chance, de bien tomber = c'est du hasard.
O	Statistiquement.
N	On ne peut pas le savoir car c'est le hasard ou bien elle sera rouge ou bien elle ne le sera pas, mais on ne peut pas le prévoir.

Parmi les justifications, nous pouvons remarquer qu'ils associent comme caractéristique d'une situation aléatoire le besoin d'avoir plus qu'un seul résultat possible, et l'impossibilité de savoir d'avance celui qui va arriver à la fin du processus.

Nous avons alors deux types d'appréhension spontanée de la situation aléatoire qui est évoquée par la consigne : le point de vue qualitatif, qui analyse la situation par rapport à la composante d'imprévisibilité et le point de vue déterministe (si l'on connaît la proportion, alors on peut donner une estimation). Nous pouvons classer les justifications des élèves selon ces deux types d'appréhension.

La question suivante dans la fiche des élèves **renvoie à la mise en œuvre fictive** de l'observation de la sortie de ce parking :

b) Pour avoir une idée de cette proportion, vous pouvez observer le nombre de voitures rouges qui sortent du parking parmi les 20 premières, en supposant qu'aucune autre voiture n'entrera pendant l'observation. Vous devez transmettre par écrit à un camarade absent, comment mener l'observation à la sortie du parking pour qu'il puisse estimer la proportion de voitures rouges. Écrivez ci-dessous votre message à votre camarade.

Remarquons d'abord le changement de la formulation de la consigne par rapport au premier groupe, classe de Troisième. Ici, la demande de transmettre par écrit comment mener cette observation à une tierce personne absente, place d'emblée les élèves dans une situation de communication pour laquelle le récepteur est un sujet fictif.

Les documents rendus par les élèves contiennent une majorité de messages qui prennent en compte plutôt le caractère quantitatif lié au résultat de l'expérimentation. Les élèves cherchent à expliquer comment faire le calcul de la proportion de voitures rouges, résultat de l'observation, sans prendre en charge l'observation elle-même. On remarque que les élèves ne mobilisent pas les connaissances acquises en Biologie ou en Physique-Chimie à propos de protocole expérimental et de processus expérimental. Quelques descriptions s'approchent d'un protocole expérimental, mais elles ne sont pas précises par rapport aux parties constitutives d'un protocole, tel que nous l'avons décrit pour la classe de Troisième. De plus, elles débouchent directement sur le calcul du pourcentage de voitures rouges. Citons quelques exemples :

> Cyril : Le plus simple est de se poster à la sortie et de compter combien il y a de voitures rouges dans les vingt premières autos qui sortiront, puis tu multiplies ce nombre par cinq et tu as en pourcentage.

> Stéphanie : tu te mets à la sortie principale du parking du magasin, mais en bloquant les autres sorties s'il y en a plusieurs. Tu comptes 20 voitures et le nombre de voitures rouges dans le groupe de 20 voitures. Et tu bloques l'entrée du magasin. Après tu fais le pourcentage de voitures rouges qui sont passées et tu trouveras la proportion de voitures rouges qu'il y a s'il y en a.

Quelques réponses proposent même la façon de calculer la proportion, en attribuant des valeurs fictives pour détailler l'algorithme de calcul. Par exemple :

> Mélanie : s'il y en a 8 sur 20 voitures il y a 40 % de voitures rouges sorties $\left(\frac{8x100}{20}\right)$. Il est donc probable qu'il y ait 40 % de voitures rouges dans le parking.

Nous pouvons supposer que les élèves n'ont pas essayé de valider leurs consignes par une « simulation évoquée » de l'action du récepteur. Cette supposition vient du fait que les messages produits par ces élèves ne permettent pas la reproduction de l'expérience car ils manquent des précisions. Par exemple, aucun message contient toutes les trois parties constitutives d'un protocole :

- l'objet de l'observation (sortie du parking pour estimer la proportion de voitures rouges) ;
- l'expérience (se placer à la sortie d'un parking et noter la couleur des 20 premières voitures qui sortent de ce parking) ;
- les conditions de l'expérimentation (on se place à la sortie du parking choisi, on décide de démarrer l'observation à un moment précis, on note le nombre de voitures rouges parmi les 20 premières voitures sortantes).

Quelques élèves indiquent les résultats possibles (la voiture pourra être rouge, vert, ou d'autres couleurs, d'après quelques messages), mais sans expliciter le critère «succès/échec » comme « rouge/autre couleur ».

Nous pouvons aussi remarquer que les élèves de ce groupe sont restés beaucoup plus dans le caractère quantitatif que dans le processus de déroulement de la situation aléatoire, si nous faisons la comparaison avec le premier groupe, celui de la classe de Troisième. Cela peut confirmer l'importance de la mise en œuvre effective d'une expérimentation pour donner aux élèves des éléments pour reconnaître les propriétés caractéristiques de cette expérience qu'ils veulent modéliser. L'absence de cette phase modifie le processus de modélisation en train de s'installer. La consigne « imaginez que vous êtes … » place d'emblée les élèves dans l'abstrait. Il n'est pas étonnant que leurs réponses se situent dans le domaine pseudo-concret. Le processus d'abstraction induit par le passage de la description concrète au protocole expérimental s'est donc trouvé minimisé.

§2.1.3. Conclusion sur l'activité A_1 dans les deux classes

Revenons aux questions que nous avons posées tout au début de lanalyse de cette activité.

Nous avons pu dégager de l'analyse de notre corpus [62] que les élèves n'associent pas spontanément la distinction entre hasard et contingence avec reproductibilité. Autrement dit, le passage du point de vue individuel, par lequel se caractérise une situation contingente, au point de vue statistique, par lequel on peut analyser la reproductibilité, dépend de l'intervention de l'enseignant.

Les élèves acceptent le protocole expérimental comme l'outil économique et efficace pour la reproduction d'une expérience, mais ils ne sont pas à même de rédiger spontanément une telle liste de consignes. En particulier, parce que l'accent n'a pas été assez mis sur la notion d'*expérience*. Même les interventions de l'enseignant ne rendent pas cette rédaction moins problématique pour les élèves. Les élèves de la classe de Troisième, qui ont fait effectivement les observations à la sortie du parking et à la sortie du collège, ont rédigé des consignes plus complètes et plus proches d'un protocole expérimental permettant la reproductibilité. Les élèves de la classe de Seconde ont eu plus de difficultés pour cette rédaction, mais sont allés plus directement dans des formulations pseudo-concrètes permettant l'expression d'une idée de probabilité.

Dans les échanges collectifs, on a pu constater que l'explicitation d'un critère pour le classement des résultats en termes de succès-échec n'est pas trop problématique pour les élèves qui ont réalisé effectivement l'expérimentation. Le groupe qui a fait une expérimentation seulement évoquée en pensée a eu plus de difficulté pour distinguer ces critères.

En conclusion, les élèves du premier groupe semblent avoir été plus sollicités pour la reconnaissance des caractéristiques concrètes de la situation qui vont pouvoir piloter l'élaboration d'un protocole et la détermination du modèle par la délimitation de son domaine de fonctionnement. Mais, pour les deux groupes, les tâches et le temps qui constituent cette activité n'ont pas été suffisants pour développer un travail complet et autonome de modélisation d'une situation aléatoire de la réalité.

§2.2. Activité A_2 : l'urne de Bernoulli

§2.2.1. Les questions auxquelles nous souhaitons répondre

En reprenant notre analyse a priori nous pouvons dégager les questions suivantes, que nous souhaitons éclairer par cette analyse a posteriori :

[62] Des productions écrites des élèves ainsi que des dialogues menés lors de la confection de ses productions ou lors de la mise en commun

1) Les élèves font-ils le lien entre les expériences « l'observation de la sortie du collège » et « la sortie du parking », et le tirage au hasard d'une perle (avec remise) d'un pot contenant des perles bleues et des perles rouges ?
2) Quelles similitudes établissent-ils entre ces expériences ?
3) Dans quelles conditions les élèves acceptent-ils de façon spontanée de simuler une situation aléatoire par le tirage au hasard d'une perle (avec remise) dans un pot contenant de perles bleues et des perles rouges ? Et, notamment, les expériences «sortie du collège » et « sortie du parking » ?

Les réponses à ces questions nous amèneront à dégager les conditions dans lesquelles les élèves identifient une expérience de Bernoulli (63) ainsi que les conditions dans lesquelles ils reconnaissent que deux expériences de Bernoulli peuvent être dites équivalentes. Nous cherchons surtout à dégager les conditions dans lesquelles les élèves acceptent de modéliser une expérience aléatoire par une urne de Bernoulli (64) : un tirage au hasard avec remise dans une urne qui contient des boules blanches et des boules noires, en proportion p et $(1-p)$.

§2.2.2. Le déroulement effectif de l'activité

Nous procéderons la description du déroulement effectif de l'activité en respectant les caractéristiques de chacun des groupes, comme nous l'avons fait pour l'activité précédente.

Premier Groupe : Classe de Troisième.

Cette deuxième activité de la situation A de notre ingénierie didactique, « l'urne de Bernoulli », a été proposée lors de la deuxième séance de notre expérimentation en classe de Troisième. Cette séance a eu lieu une semaine après la première séance, dans laquelle les élèves ont travaillé sur l'activité A_1, « l'aléatoire dans la réalité ».

Les élèves avaient fini la première séance sans véritablement appréhender la notion de protocole expérimental : les parties constitutives d'un protocole et la possibilité d'une validation pragmatique par sa mise en œuvre, afin d'observer si l'expérience en jeu a été bien reproduite. L'enseignant a commencé alors cette deuxième séance par une situation de rappel, dans laquelle il re-introduit ces connaissances, qui font partie des pré-requis pour la suite des activités.

(63) Comme défini au §4 du Chapitre II, une expérience de Bernoulli est une expérience aléatoire qui résume les issues possibles par deux événements, « succès » ou « échec ».
(64) Comme défini au §4 du Chapitre II, une expérience aléatoire est modélisable par une urne de Bernoulli si pour chaque répétition de l'expérience de Bernoulli, nous avons le retour aux mêmes conditions initiales.

L'usage et la signification du mot « échantillon » sont aussi objet de cette situation de rappel. L'usage du mot « population » pendant le débat qui suit confirme la remarque que nous avions faite dans l'analyse a priori : c'est un mot qui appartient déjà au vocabulaire des élèves. Le rappel organisé par l'enseignant sur la notion d'échantillon est fondé sur l'usage du mot « population », sans que les élèves ne montrent aucune réaction d'absence de connaissance de ce vocabulaire. L'enseignant utilise même l'expression « échantillon dans une population d'objets » lorsqu'il essaye de mettre en évidence la variabilité des fréquences obtenues dans les divers échantillons constitués par les observations « sortie du parking » et « sortie du collège ».

> Prof : Est-ce que ces résultats, ça vous paraît normal ? Comment pourrait-on utiliser ça ? Mettez-vous à la place (…) est-ce que vous ne voyez pas dans ce type de protocole expérimental, quelque chose que se fait actuellement là ?
>
> Élève : Le recensement.
>
> Prof : Le recensement, par exemple. Quels sont d'autres exemples où on va avoir ce type de protocole expérimental ? Où on va tirer un échantillonnage comme ça ?
>
> Élèves : Des sondages.
>
> Prof : Si on prend pas des personnes, on va prendre une population d'objets et on va tirer au hasard dans ces objets …

Les réactions des élèves aux questions posées par l'enseignant montrent que les notions de « population » et « échantillon », issues des connaissances statistiques, ne sont pas à la source des difficultés rencontrées pour l'appréhension de la notion de protocole expérimental.

La suite du débat qui constitue cette situation de rappel a permis de reprendre le protocole construit pour l'expérience « sortie du collège », (SC). Ainsi, cela a permis de lui donner un statut d'introduction à l'activité A_2, en proposant déjà le tirage au hasard dans un pot de perles comme l'expérience qui peut « remplacer » l'expérience SC. Cette présentation a changé ainsi le plan prévu pour la mise en place des activités.

> Prof. : Alors, on va essayer de se dégager, si on ne prend pas des filles et des garçons, est-ce qu'on pourrait remplacer cette expérience de garçons par autre chose ?
>
> (…)
>
> Prof : On va faire une expérience comme l'expérience « garçons-filles ». Quand je dis que je veux une expérience qui soit de même type, quels sont les grands critères que devra avoir cette expérience ? Qu'est-ce qu'il va falloir que ce modèle soit comme les garçons et les filles ?
>
> Élèves : la même règle du jeu.

Et en revenant sur l'évocation de la notion de population dans l'usage statistique de ce mot, l'enseignant propose :

> Prof : Pour donner un exemple, qu'est-ce qu'on pourrait faire dans la classe pour remplacer les observations des garçons et des filles ? Ne pensez plus à des personnes. Qu'est-ce qu'on pourrait faire qui soit une expérience du type « bon ou pas bon » ?

Dans ces extraits de débat, nous pouvons remarquer que l'enseignant présente l'expérience du pot de perles déjà comme une expérience semblable. La phrase « quels sont les grands critères que devra avoir cette expérience » induit déjà que l'expérience proposée devra appartenir à la même catégorie d'expériences de Bernoulli. Il introduit même le mot « modèle » pour désigner cette nouvelle expérience.

Les réponses données par les élèves aux questions posées par l'enseignant pendant la situation de rappel nous amènent à inférer qu'ils ont assimilé la notion de « protocole expérimental » à celle de « règle du jeu ». Ils associent alors la notion « d'expériences équivalentes » à l'ensemble d'expériences qui ont la même règle du jeu. Nous remarquons une résistance de la part des élèves à utiliser un vocabulaire scientifique, en gardant les termes du langage courant : « *règle du jeu* » à la place de «*protocole expérimental* ». Cela confirme notre observation lors de l'analyse de l'activité précédente, selon laquelle la notion de protocole introduite par les Sciences Physiques n'est pas une connaissance stable chez les élèves. En conséquence, cette notion n'intervient pas dans le milieu effectif de la situation car les élèves ne la reconnaissent pas comme utilisable lors d'un travail hors des contenus par lesquels elle a été introduite (Sciences Physiques, Biologie, Chimie). Dans ces conditions, l'idée de « *protocole* » va fonctionner en-acte.

L'enseignant reprend alors son projet d'enseignement, selon lequel il veut introduire le tirage dans un pot de perles comme expérience de référence. Il demande ainsi aux élèves des suggestions à propos des expériences qu'ils pourraient faire en classe, et en conséquence moins coûteuses en temps que les observations à la sortie du parking ou à la sortie du collège. Les élèves fournissent des suggestions faisant appel à d'autres caractéristiques relatives à la population des élèves du collège, comme la couleur des yeux, des cheveux, etc. Une élève assise au premier rang ayant probablement repéré le pot de perles sur le bureau du professeur, propose de remplacer les élèves du collège par des billes colorées. L'enseignant se saisit immédiatement de cette suggestion qui convient à son projet : l'utilisation d'un sac avec des billes à deux couleurs différentes. Proposant aux élèves de reprendre les critères de classement des résultats pour l'identification de cette expérience comme une expérience de Bernoulli, il annonce ces critères lors de la proposition de la tâche.

> Prof : Donc, on prend un sac, dans ce sac, on va mettre des billes à deux couleurs différentes, et puis dans le critère, on dira que c'est bon quand on aura rouge. Quand c'est rouge, c'est bon, quand c'est pas rouge, c'est pas bon. Par exemple. On va faire cette expérience-là

Cette avance dans le temps didactique, due aux contraintes du système didactique, n'a pas semble-t-il de conséquences sur l'apprentissage de la notion d'expérience de Bernoulli. Dans la suite des activités, nous avons pu remarquer que les élèves ont réussi à identifier les critères pour la dichotomisation des résultats à partir des énoncés des tâches proposées, sans aucune difficulté.

L'enseignant pose encore une dernière question avant la distribution du matériel nécessaire à la mise en œuvre de l'expérimentation. En évoquant les gestes à faire pour cette mise en œuvre, autrement dit, en évoquant le protocole expérimental à suivre, il soulève la question des remises lors d'un tirage au hasard. Les élèves s'engagent dans la discussion, ce qui montre qu'ils ont bien mobilisé la notion de « propriétés pertinentes pour la reproduction d'un même expérience », introduite lors de la séance précédente. Ils associent le fait que les élèves observés ne rentrent plus dans le bâtiment, contrairement aux billes qu'on leur demande de remettre dans le pot après observation. Les élèves ont bien remarqué que cela change les conditions initiales pour la répétition de l'expérience au cours de l'expérimentation : la sortie d'un élève change le nombre d'élèves qui restent dans le collège et la remise de la perle ne change pas le nombre de perles dans le pot pour le prochain tirage.

> Prof : Alors, qu'est-ce que je fais avec la bille ? Je la lance ou …
>
> Élèves (un groupe) : on laisse de côté.
>
> Élèves (un autre groupe, en parlant au même temps) : on la remet dans le pot.
>
> Élève : oui, mais si on remet, on peut tomber plusieurs fois sur la même bille.
>
> Prof : Oui, on peut tomber sur la même bille. C'est intéressant ce que tu dis. Est-ce que c'est important qu'on tombe sur la même ou pas ?

Ainsi, à partir de ce dialogue, l'enseignant a pu faire remarquer aux élèves l'importance des hypothèses sur lesquelles le processus de modélisation s'appuie. Le dialogue a montré aux élèves que la remise de la bille est un choix qui permet de prétendre recommencer "la même expérience". L'hypothèse selon laquelle cette remise de la perle tirée dans le pot contrairement à l'élève sorti du collège ne remet pas en cause de manière appréciable le fait que l'on puisse considérer ces deux expériences comme équivalentes. Elle apparaît aussi comme un choix de la modélisation. Nous pouvons remarquer ici la difficulté inhérente à la modélisation : un modèle n'a pas pour objet de reproduire le plus exactement possible la réalité. Il est un instrument à la disposition de l'utilisateur qui doit décider s'il est adéquat ou non pour interpréter cette réalité (cf. définition de modèle présentée au Chapitre I).

Ce dialogue a montré aussi que le choix de considérer cette équivalence est fait au début du processus de modélisation. Ainsi, l'idée de choisir une autre hypothèse selon laquelle on ne ferait pas la remise des billes après les tirages est introduite par l'enseignant comme une possibilité inintéressante pour l'objectif fixé : interpréter la sortie du collège selon un modèle d'urne de Bernoulli. À ce niveau de l'expérimentation, une justification de cette hypothèse portant sur les tailles relatives de l'échantillon observée et de la population des élèves n'est pas envisagée.

Du fait que cet objectif n'était pas encore explicite pour les élèves, l'acceptation de cette hypothèse a relevé d'un effet de contrat : les élèves ont accepté les remises parce que l'enseignant leur a dit de le faire. En conséquence, la validation du choix du modèle (tirage avec remises) n'est pas un résultat d'une rétroaction du milieu effectif construit pour cette activité, mais un effet du contrat didactique. Pour éviter ce type de validation par contrat, on pourrait faire fonctionner les deux modèles, avec remises et sans remises, pour laisser à la charge de l'élève le choix de celui qui est le plus adéquat pour représenter la situation effectivement observée. Autrement dit, la situation réelle simulée et des résultats effectivement observés. Mais cette validation suppose une simulation informatique qui n'était pas l'objet de la recherche à ce moment de l'ingénierie didactique.

Dans la suite, les élèves ont reçu le matériel pour la mise en œuvre de l'expérimentation, ainsi que la fiche à remplir avec les résultats obtenus. Les élèves font les 50 tirages dans les pots qu'ils ont reçus, ils notent les résultats dans le tableau et ils comptent le nombre de perles rouges obtenues. Le résultat de chaque groupe est transcrit sur un transparent pour la mise en commun, que nous reproduisons ci-dessous :

Tableau 8

Binôme	Nombre de succès
1	19
2	22
3	24
4	11
5	23
6	18
7	24
8	22
9	21
10	25
11	26
12	22

Après une brève discussion générale dans la classe, les élèves s'accordent sur le fait qu'il y a plus de perles bleues que de perles rouges dans le pot, mais sans que personne ne puisse donner le nombre effectif de perles de chaque couleur. Ils construisent cette conjecture à partir de l'observation du pot et à partir de l'analyse des fréquences (en moyenne, ils ont obtenu plus de perles bleues que de rouges).

L'enseignant prépare alors la tâche suivante, qui demande l'association entre l'expérience du pot de perles (ER) avec l'expérience « sortie du collège ».

> Prof : Si on reprend l'expérience précédente, c'est-à-dire, les garçons et les filles, ça nous permettrait de dire … quelles sont les filles, quels sont les garçons ?
>
> Élèves : Les filles sont les rouges et les garçons les bleues.
>
> Prof : Est-ce qu'on pourrait conclure quelque chose ?

Élèves : (pas de consensus sur les réponses)

L'association « filles/perles rouges » peut ne pas être spontanée, car la fiche des élèves qui contient le tableau qu'ils ont rempli contient aussi la question suivante :

Reprenons l'activité sur la répartition des élèves du collège entre filles et garçons. Si nous représentons les filles par les perles rouges et les garçons par les perles bleues, pensez-vous que ces tirages que vous venez de faire peuvent remplacer les observations réelles ? Pourquoi ?

Nous pouvons alors supposer que les élèves avaient déjà lu cette question lorsque l'enseignant propose l'association entre les couleurs et les élèves du collège.

Pour répondre à la question posée dans la fiche, les élèves évoquent l'intervention du hasard comme une justification pour la mise en rapport des deux expériences. Un élève soulève, spontanément, les conditions de la mise en œuvre de l'expérimentation : la différence entre les populations de départ. L'argumentation est construite à partir d'un point de vue quantitatif, car l'élève ne parle pas du choix d'un tirage avec remise pour représenter un tirage sans remise (la sortie du collège). Il reste dans l'analyse des effectifs de chaque population, même si dans le dialogue avec l'enseignant, il utilise le mot « proportion » pour exprimer la différence des conditions initiales :

Max : on a pas le même truc au départ.

Prof : pas le même truc au départ … Alors …

Élèves : ouais.

Max : on n'a pas la même proportion au départ.

La composition du pot n'a pas encore été mise en évidence et les élèves n'ont pas encore cherché à connaître cette composition par comptage des perles dans le pot. En conséquence, nous pouvons penser que Max utilise le mot « proportion » pour exprimer la différence entre les tailles de chacune des populations en jeu, sans aller directement aux rapports entre couleurs ou sexes. Nous remarquons aussi que Max, ainsi que les autres élèves qui ont été d'accord avec son affirmation, n'ont pas mobilisé clairement la notion de proportion. Un élément observable qui nous conduit à cette affirmation est l'absence de recherche de la vraie composition du pot de la part de ces élèves. Ou encore, l'absence de comparaison entre la proportion de perles rouges qu'ils ont obtenu et la proportion de filles qu'ils ont observée à la sortie du collège.

L'enseignant essaie alors de rendre perceptible aux élèves cette rétroaction du milieu par la mise en évidence de ces quantités.

Prof : Alors, c'est-à-dire que la population de départ ça serait les billes, dans leur ensemble. On a dit, globalement, les filles correspondaient aux rouges, les garçons correspondraient aux bleues. On aurait à peu près le même type de pourcentage malgré tout. C'est-à-dire, on aura combien, la, à votre avis …

Cette question posée par l'enseignant déclanche un débat sur le caractère quantitatif de l'expérimentation : une recherche des proportions qui caractérisent chacune des populations en jeu. Nous faisons la remarque que les élèves ne se limitent pas à étudier les résultats d'un point de vue quantitatif, mais que leur argumentation vise plutôt la caractérisation des populations par rapport à la comparaison demandée par l'énoncé : ils gardent comme caractéristique principale la représentation de l'expérience attachée à la situation en jeu par un tirage au hasard avec ou sans remise.

> Prof : Donc, si je vous demandais de me dire si à la place de combien de billes, (les élèves comptent les billes dans le pot) 50 billes, est-ce que vous pourriez me donner le nombre de billes rouges et le nombre de billes bleues ?
>
> Benjamin : 25 et 25.
>
> Prof : Si on avait 25 et 25, est-ce qu'on aurait réussi ces résultats ? (Il montre le transparent qui contient les résultats obtenus par la classe).
>
> Élève : Non.
>
> Benjamin : Oui, ça peut parce qu'on a remis les billes.
>
> Prof : Parce qu'on a remis les billes …

Nous constatons que les élèves questionnent l'usage d'un tirage avec remise lorsque la situation à modéliser n'admet pas des remises. Les élèves n'acceptent pas les hypothèses de modèle proposées par l'enseignant. Une solution envisageable dans cette situation aurait été de montrer aux élèves la possibilité de représenter une même situation par plusieurs modèles distincts. Le choix du modèle eût été alors une conséquence des objectifs fixés pour la modélisation.

Pendant le débat, les élèves ont compté les perles dans le pot : vingt-quatre perles rouges et vingt-six perles bleues. Par la comparaison des quantités relatives de garçons et de filles et les quantités relatives de perles rouges et de perles bleues, l'enseignant institutionnalise l'équivalence entre les deux expériences. Il introduit ainsi la notion de représentation d'une expérience aléatoire par un modèle d'urne de Bernoulli : « *Nous pouvons fabriquer une expérimentation qui remplace l'observation réelle* ».

Le réinvestissement prévu est un exercice proposé sur papier : chaque binôme devrait proposer un pot de perles pour simuler une expérience donnée.

Dans un pot rempli de perles colorées, les perles blanches représentent les « succès » et les noires les «échecs ». Combien de perles de chaque couleur devrait-il y avoir dans ce pot pour qu'on puisse réaliser une simulation des expériences ci-dessous.

Chaque binôme a reçu une fiche contenant deux expériences aléatoires, l'événement pris comme succès de l'expérience et un tableau dans lequel il devrait porter le nombre de perles de chaque couleur, le nombre total de perles et la justification de la réponse donnée. Reproduisons le tableau présenté lors de l'analyse a priori de cette activité :

a) Le jeu de « pile ou face » avec une pièce. Succès : obtenir la position « face ».
b) On choisit *au hasard* un élève dans la classe et on lui demande le jour de son anniversaire en 1999, du lundi au dimanche. Succès : l'anniversaire tombe un « dimanche ».
c) On choisit *au hasard* un élève dans une classe de 18 filles et 12 garçons et l'on observe si on tombe sur un garçon ou sur une fille. Succès : choisir une « fille ».
d) On fait tourner une roulette pour laquelle il y a 5 secteurs de mêmes dimensions dont 3 blancs et 2 rouges. Succès : obtenir un secteur « rouge ».
e) On lance un dé sur une table et l'on veut observer sa face supérieure après immobilisation. Succès : obtenir un « six ».
f) On démarre un chronomètre et l'on demande à une autre personne de dire «stop » pour qu'on l'arrête. On note le chiffre des centièmes de secondes affiché. Succès : obtenir un « multiple de 3 ».

Le tableau ci-dessous montre les réponses de chaque binôme.

Tableau 9

Binôme	Item	Nombre de perles			Justification
		blanches	noires	total	
Sabrina/Alexia	a	1	1	2	Une perle blanche qui signifie « face » Une perle noire qui signifie « pile » Car avec une pièce il n'y a que 2 solutions.
	f	3	7	10	0 1 2 ③ 4 5 ⑥ 7 8 ⑨ Pour le succès il n'y a que 3 solutions (3 6 9) Et pour les échecs 7 (0 1 2 4 5 7 8) Donc il faut 10 perles au total
Frederic/Guillaume	a	1	1	2	1 perle par face.
	c	18 (3)	12 (2)	30 (5)	1 perle par élève.
Benjamin/Laurent	a	1	1	2	Dans pile ou face il y a deux possibilités donc 1 perle blanche, 1 perle noire. 2 possibilités. Ou encore, dans chaque urne le même nombre de perles pour qu'il y a deux possibilités.
	d	3	2	5	Car il y a 5 secteurs et qu'il faut obtenir des rouges.
Maxime/Vincent	a	10	10	20	
	c	24	36	60	
Anne/Morgane/Elise	a	1	1	2	Quand on joue à "pile ou face", on a une chance sur deux de tomber sur face. Si on remplace face par une bille blanche et pile par une bille noire et qu'il y a une bille blanche et une noire alors on aura aussi une chance sur deux de tomber sur la bille blanche.
	b	1	6	7	Comme il y a 7 jours dans la semaine, l'anniversaire a une chance sur 7 de tomber un dimanche. On remplace dimanche par une bille blanche et les autres jours par des noires et on a toujours une chance sur 7 de tomber sur la blanche.

Aurélie/Marilyne	a	1	1	2	Dans pile ou face il y a deux possibilités donc 1 perle blanche, 1 perle noire. 2 possibilités. Ou encore, dans chaque urne le même nombre de perles pour qu'il y a deux possibilités.
	c	18	12	30	
Nadège/Jessica	a				1 perle blanche. 1 perle noire.
	d	2	3	5	
Zubeydé/Jessica	a	1	1	2	
	e	1	5	6	Pour le succès, 1 solution Pour l'échec, 5 Il y a 6 solutions.
Audray/Camille	a	1	1	2	1 une face blanche = face 1 une face noire = pile car sur une pièce il y a 2 solutions
	e	1	5	6	1 blanche nombre 6 5 noires nombre « autre que 6 » car il y a 1 seul 6 sur un dé.

Les réponses données par les élèves montrent que deux groupes, Anne/Morgane/Elise et Aurélie/Marilyne, mobilisent explicitement la pré-probabilité comme critère de validité pour leur réponse. Ainsi, l'association entre chaque élément de la population et une perle dans le pot, facilitée par la plupart des exemples, les a permis de valider la composition donnée par les chances de succès qu'ils estiment avoir lors de la réalisation de l'expérience modélisée.

Nous pouvons aussi supposer une mobilisation implicite de la pré-probabilité chez Frederic/Guillaume et chez Maxime/Vincent. Ces deux binômes ont proposé une composition pour le pot de perles qui est proportionnelle au nombre de résultats possibles de l'expérience aléatoire, encore qu'ils n'ont pas justifié leurs réponses.

Les autres binômes de la classe proposent une composition issue de l'association « élément de la population-perle ». Cette assimilation a été facilitée par les exemples proposés, tels que nous l'avons déjà fait remarquer plus haut : les effectifs n'étaient pas suffisamment grands pour qu'une telle composition puisse sembler improbable.

La lecture du tableau nous conduit aussi à constater l'existence du biais d'équiprobabilité [(65)] chez quelques élèves. Citons particulièrement la réponse donnée par Benjamin et Laurent. Nous signalons l'égalité entre leur réponse et celle qui est donnée par Aurélie et Marilyne, mais les échanges dans la classe nous montrent que Benjamin propose des réponses à l'enseignant qui pouvaient être expliquées par la présence de ce biais.

[(65)] Le biais d'équiprobabilité existe quand le sujet donne la réponse d'équiprobabilité en s'appuyant sur un « *principe d'équiprobabilité selon lequel des événements à caractère aléatoire seraient par nature équiprobables* ». (Lecoutre (1984), citée dans Lecoutre, 1985, p. 196).

Deuxième Groupe : Classe de Seconde

L'activité A_2 pour la classe de Seconde commence immédiatement après la mise en commun de l'activité A_1 : la mise en commun des descriptions données pour l'expérience évoquée « sortie du parking » et des exemples de situations aléatoires. Lors de cette mise en commun, l'enseignant situe le hasard par rapport aux divers contextes proposés par les élèves : les jeux, les rencontres. Nous pouvons dégager de son discours l'intentionnalité de bien distinguer le hasard contingent de celui qu'il désigne par « hasard mathématisable » lorsqu'il propose cette distinction.

Nous dégageons aussi l'introduction explicite de la notion d'expérience, contrairement à ce que nous avons observé lors du déroulement de cette activité dans la classe de Troisième. L'enseignant utilise le mot « expérience » pour désigner les situations aléatoires que nous pouvons « mathématiser ». D'après cette présentation de l'enseignant, « *une expérience est reproductible si le hasard qui intervient est mathématisable* ».

> Prof : On ne maîtrise pas le hasard, mais on peut arriver à faire des prévisions, à prévoir des choses, bien que le hasard intervienne. Nous, ce qu'on va faire, c'est de travailler sur une expérience reproductible et dans laquelle le hasard intervient.

Remarquons que dans cette explication, la possibilité de reproduction d'une expérience aléatoire n'est pas associée à la notion de protocole expérimental, comme pour la classe de Troisième. L'enseignant limite sa présentation de la reproductibilité à la distinction entre des situations issues de la contingence (il cite le contexte des rencontres) et des situations sur lesquelles « *on peut calculer après* ». Le passage du point de vue individuel au point de vue statistique n'est pas explicite dans cette présentation.

Malgré cette introduction privilégiant une approche quantitative – "*on peut faire des calculs après*" – les élèves ont pu manipuler le générateur de hasard, ici le pot de perles, pour réaliser effectivement de l'expérimentation. Cela leur a permis de dégager les propriétés caractéristiques de l'expérience en jeu.

Dans le déroulement de la séance, l'enseignant a distribué aux élèves la fiche contenant les consignes et un sac contenant des perles bleues et rouges.

Voici un pot qui contient des perles rouges et des perles bleues et les règles pour jouer à un jeu avec ce pot. ✓ On mélange les perles dans le pot. ✓ On tire une perle au hasard. ✓ On note la couleur de cette perle. ✓ On remet la perle dans le pot. Faites 50 tirages successifs, en indiquant les résultats dans le tableau ci-dessous. On admet qu'on a un succès si la perle qui est choisie est une perle rouge. Comptez le nombre de succès que vous avez obtenu dans ce jeu.

Après le tirage dans le sac qui contenait 39 perles bleues et 11 perles rouges, les binômes ont obtenu les résultats ci-dessous :

Tableau 10

Binôme	Nombre de succès (50 tirages)
Camille, Bénédicte	10/50
Gaëlle, Caroline, Camille	16/50
Christelle, Hanna, Mélanie	9/50
Emilie, Anna, Rose	12/50
Julien, Cyril	10/50
Grégory, Djamel, Olivier	8/50
Anaï s, Nathalie	15/50
Julie, Myriam	6/50
Jérémy, Kévin	13/50
Stéphanie, Claire	16/50
Yaël, Cyrielle, Marylène	9/50
Melissande, Isabelle	11/50
TOTAL	146/650

Les consignes sont les mêmes que pour la classe de Troisième. Nous avons changé seulement la composition du pot de perles afin de permettre une comparaison avec la composition d'un parking fictif dont l'activité propose d'évoquer l'observation de la sortie. La tâche qui suit dans l'activité est reproduite dans l'encadré ci-dessous :

Reprenons l'activité qui propose d'étudier la proportion de voitures rouges dans l'ensemble de voitures qui sont garées dans un parking. Supposons que dans ce parking il y ait 700 voitures, parmi lesquelles 154 rouges.

Soit d'une part l'expérience aléatoire «observer la couleur de la première voiture qui sort » et d'autre part l'expérience aléatoire « choisir une perle au hasard dans le pot et observer sa couleur ».
Quelle similitude et différences voyez-vous entre ces expériences aléatoires proposées ? Justifiez votre réponse.

Remarquons qu'il y a une distance importante entre les situations à comparer : le parking ou la sortie du collège et le tirage au hasard dans le pot de perles. La sortie du collège et la sortie du parking posent explicitement la question "des chances" d'observer une voiture rouge à la prochaine sortie (pré-probabilité) : 700 voitures et 154 voitures rouges. L'expérience du tirage dans le pot de perles pose implicitement cette question "des chances" d'avoir une perle rouge au prochain tirage, à partir de l'observation des résultats totalisés disponibles aux élèves : 650 tirages et 146 succès. Il y a donc une inférence statistique sur une population non fixée (mais accessible par comptage), faisant appel à une connaissance-en-acte du phénomène de stabilisation des fréquences et d'une intuition que 650 est un assez grand nombre pour cela. **Le rapprochement entre les expériences ne relève donc pas de la simulation, mais de la mise en œuvre du concept de probabilité dans toute sa dualité** (cf. Chapitre I). Dans ces conditions, nous soulignons que l'évolution de l'activité dans la classe de Seconde n'a pas été celle qui a été souhaitée par la recherche, car elle brûle les étapes. Même si les élèves semblent s'y conforter (justifications très pertinentes), ils ne sont pas en mesure d'expliciter clairement cette dualité et donc de construire un véritable savoir à cet endroit de notre expérimentation.

Les élèves vont rester dans cette activité pendant 30 minutes, et produisent les réponses présentées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 11

Binôme	Similitudes et différences	Justification
Camille, Bénédicte	On ne peut pas choisir quelle voiture ou quelle perle va sortir ; Mais, si l'on regarde dans le pot on peut tricher sur la couleur des perles, mais étant donné que l'on ne conduit par les voitures, on ne peut pas tricher ; On a autant de chance de voir une voiture ou une perle rouge sortir.	Le hasard intervient.
Gaëlle, Caroline, Camille	Dans le cas de ces 2 expériences, on ne peut pas connaître la couleur de la prochaine perle ou voiture malgré. Par contre, on peut donner un avis sur la couleur de la prochaine voiture, grâce à la probabilité (sur un total d'une vingtaine de voitures).	On peut calculer le pourcentage de voitures rouges. Ex. : 22 % de voitures rouges donc 22 chance sur 100 d'observer une voiture rouge. En fait, dans le sac de billes rouges et bleues, les bleues représentent les voitures des autres couleurs.

Christelle, Hanna, Mélanie	Similitudes : la proportion de billes rouges tirées par l'expérience est à peu près la même que celle de voitures rouges dans le parking. Les deux nombres 154 et 146 sont liés au hasard, on ne pouvait pas les prévoir précisément. Différences : dans la deuxième expérience, le résultat est lié « à nous », contrairement à la première expérience.	Sur 700 voitures, 154 rouges ; Sur 650 perles, 146 rouges.
Emilie, Anna, Rose	On s'aperçoit que les % sont presque les mêmes (22 %). Il y a moins de billes et de voitures rouges que d'autres couleurs. C'est plus facile de faire l'expérience des billes que des voitures. C'est la même expérience en taille réduite avec les billes, dans les 2 cas le hasard intervient.	
Julien, Cyril	Les similitudes sont que : le rapport $\frac{\text{nombre de tirage}}{\text{nombre de succès}} = \frac{650}{146} \cong 4{,}5$ $\frac{\text{nombre de voitures}}{\text{nombre de voitures rouges}} = \frac{700}{154} \cong 4{,}5$ Donc ces 2 rapports sont à peu près le même.	
Grégory, Djamel, Olivier	Il y a 22 % de voitures rouges dans le parking alors qu'il y a 22 % de billes rouges dans le sac. Il y a 11 succès sur 50 tirages en moyenne et il y a 11 billes rouges.	
Anaï s, Nathalie	On ne peut pas prévoir si une voiture ou une perle rouge va sortir. Il y a plusieurs différences : il y a 700 voitures dans le parking et 650 tirages. Il y a 154 voitures et 146 rouges tirées : c'est proche. Parmi les 700 voitures, il n'y a pas seulement des rouges et des bleues. De plus, quand une voiture sort, elle ne revient pas alors que quand on tire une perle rouge, on la remet dans le pot. On a donc plus de chance de la retirer.	Le hasard intervient.
Julie, Myriam	Les similitudes entre ces expériences sont que l'on ne peut pas prévoir dans les deux cas le résultat, les ordres de grandeur des résultats (154 voitures rouges et 146 perles rouges) sont assez proche l'un de l'autre.	Le hasard intervient dans les similitudes.

Jérémy, Kévin	Les deux expériences portent sur la couleur du premier objet qui sort. C'est le hasard qui intervient dans les 2 cas. Il y a des perles et des bagnoles.	Il y a à peu près la même proportion de voitures rouges ou de billes rouges dans des 2 cas, donc, c'est le même hasard qui intervient.
Stéphanie, Claire	Différences : on ne connaît pas le nombre de perles, alors qu'on connaît le nombre de voitures. Il y a plus de couleurs différentes pour les voitures, il n'y en a que 2 pour les perles. On a beaucoup plus de chance de tomber sur une perle rouge qu'une voiture rouge. Ressemblances : c'est toujours le hasard qui intervient.	
Yaël, Cyrielle, Marylène	Similitudes : dans les deux expériences les objets rouges sont minoritaires. Différences : dans l'expérience avec les perles, nous remettons à chaque fois les perles que nous tirons dans le sac. Si on revient le lendemain, le nombre de voitures rouges aura sûrement changé pour le même nombre de voitures au total, alors que dans l'autre expérience le nombre de billes sera exactement le même.	
Melissande, Isabelle	Ces expériences sont semblables car c'est le hasard. Mais leur différence est que pour les perles on pioche dans un tas alors on peut tirer toujours la même perle, tandis que pour les voitures on ne peut pas retomber sur la même, elles sortent du parking l'une après l'autre.	Car c'est ce que j'ai observé en faisant l'expérience des perles et en étudiant celle des voitures.

Nous remarquons que l'introduction des valeurs numériques dans le problème place les élèves dans une analyse quantitative à la place de l'analyse qualitative envisagée davantage. C'est une démarche typique des sciences expérimentales (on peut analyser un phénomène à partir de résultats numériques), mais atypique dans une classe de Mathématique, ce qui peut justifier cette prise de position quantitative par les élèves (effet de contrat).

La lecture du tableau nous permet de remarquer que le binôme Camille/Bénédicte utilise la décentralisation signalée dans l'analyse a priori comme une caractéristique qui sépare les deux expériences, « la sortie du parking » et « le pot de perles ». Leur argumentation est fondée sur la possibilité de manipuler elles-mêmes le générateur de hasard dans le cas du pot de perles, conduisant à une possibilité de contrôle des résultats : « *on peut tricher sur la* *couleur des perles* ».

Pour les élèves de ce groupe, la classe de Seconde, contrairement à ce que nous pensions dans notre analyse a priori, nous n'avons pas perçu la décentralisation [(66)] et la dépersonnalisation [(67)] de l'expérience « sortie du parking » comme source d'un obstacle didactique. Nous n'avons pas pu remarquer une appréhension inadéquate de la notion d'expérience reproductible par le passage au point de vue statistique. Autrement dit, l'interprétation d'une situation contingente comme situation reproductible ou au contraire, la non-identification de la reproductibilité d'une expérience par le passage au point de vue statistique. Il y a un seul binôme qui présente cette mobilisation inadéquate de la notion de reproductibilité : d'après Yaël, Cyrielle et Marylène, la population du parking change si on change le moment de l'observation. Nous pouvons remarquer qu'ils regardent le fait au moment de l'observation, et non l'ensemble d'observations qui appartiennent à la même catégorie d'expériences aléatoires.

Cette classe de Seconde n'a pas pu s'engager dans la dernière tâche de l'activité : le réinvestissement constitué par la liste d'expériences pour lesquelles ils devaient donner la composition d'un pot de perles qui permet de simuler ces expériences. En conséquence, les effets de ce contournement d'obstacle de la non-explicitation du passage au point de vue statistique seront à examiner lors du déroulement des deux situations didactiques suivantes dans notre ingénierie.

La lecture du tableau nous permet aussi de remarquer deux types de similitudes évoquées par les élèves :

Tableau 12

Similitudes	Nombre de binômes
(a) Le hasard intervient dans les deux expériences.	9/12
(b) La proportion de succès est la même.	8/12
(c) Le hasard intervient et la proportion de succès est la même (ou approximativement la même).	6/12

Nous pouvons aussi mettre en évidence la réponse donnée par Emilie, Anna et Rose : « *c'est la même expérience en taille réduite* ». Cette réponse peut indiquer un début de la conceptualisation de la notion de modèle par ces élèves.

(66) La non-manipulation des générateurs de hasard par les élèves lors de la réalisation d'une expérience aléatoire a été identifiée comme un processus de décentralisation dans l'analyse a priori.
(67) Le passage au point de vue statistique, le passage du contingente au reproductible, a été identifié comme un processus de dépersonnalisation dans l'analyse a priori.

Remarquons aussi qu'aucun binôme n'a identifié la possibilité de classer les résultats possibles en deux catégories, succès et échec, comme une similitude. Une telle réponse dans le groupe représenté par la troisième ligne de notre tableau pourrait indiquer la reconnaissance, par ces élèves, de l'équivalence entre deux expériences de Bernoulli.

Les différences entre les deux expériences signalées par les élèves suggère l'inadéquation du modèle d'urne de Bernoulli pour représenter selon eux l'expérience « sortie du parking » :

Tableau 13

Différences	**Nombre de binômes**
(a) L'expérience avec le pot est un tirage avec remise et celle de la sortie du parking n'admet pas de remise.	3/12
(b) La composition des deux populations n'est pas la même.	2/12
(c) L'expérience avec le pot peut être manipulée par l'expérimentateur, contrairement à l'observation de la sortie du parking.	3/12

Parmi ces groupes, un binôme sur douze a donné une réponse contenant à la fois les justifications (a) et (b). Un binôme sur douze a produit des réponses contenant à la fois les justifications (a) et (c).

Remarquons encore que selon Yaël, Cyrielle et Marylène, la différence de composition est due surtout à la possibilité de changement de la population du parking lors d'une deuxième observation.

Ces réponses repérées dans le tableau indiquent que les élèves n'ont pas encore construit une conception adéquate de la notion d'expérience aléatoire, et en conséquence, de la notion d'expériences aléatoires équivalentes.

§2.2.3. Conclusion de l'analyse a posteriori de l'activité A_2

Les diverses réponses données par les élèves au cours de cette activité nous amènent à conclure que la distinction entre hasard et contingence est faite différemment selon les deux groupes : classe de Troisième et classe de Seconde. Nous remarquons que les élèves de la classe de Troisième, qui ont réalisé effectivement les expérimentations « sortie du parking » et « sortie du collège », font cette distinction de façon moins problématique. Nous pouvons supposer que le passage explicite au point de vue statistique par la reformulation des exemples fournis lors de l'activité préalable dans A_1 a favorisé l'appréhension de la notion de reproductibilité.

Cette absence dans la classe de Seconde a provoqué une certaine difficulté dans la recherche des similitudes et des différences entre les deux expériences : une expérience présentée dans un contexte de la vie quotidienne, «sortie du parking » et « sortie du collège », et le tirage au hasard dans un pot de perles. Nous voulons dire par là que la notion *d'expériences équivalentes* ne semble pas avoir été acquise par ces élèves, même s'ils ont bien compris la notion d'expérience aléatoire, un des enjeux de la situation didactique. L'absence d'un réinvestissement sur ces notions ne nous permet pas d'aller plus loin dans notre analyse, au moins pour cette première situation de notre ingénierie didactique.

Revenons sur une des remarques faites au cours de l'analyse a posteriori de l'activité A_1 : le constat de l'absence d'un travail dans lequel l'élève serait confronté à plusieurs modèles pour représenter une même situation aléatoire. Le choix du modèle le plus adéquat serait à la conclusion d'un processus d'analyse de ces modèles, analyse pilotée par les objectifs de la modélisation en cours. Prenons un exemple. On pourrait avoir exploité l'expérience « anniversaire » proposée comme réinvestissement pour la classe de Troisième selon cette approche. L'expérience étant «*choisir un élève au hasard dans la classe et demander le jour de la semaine de son anniversaire, du lundi au dimanche*», l'élève pourrait avoir été confronté à deux modèles distincts pour la représenter : soit prenant comme population les jours de la semaine et sous l'hypothèse du principe d'indifférence [(68)], soit prenant comme population les élèves de la classe, et donc, la composition précise des anniversaires dans la classe.

Une telle activité pourrait, à notre avis, avoir rendu cette première situation, «Expérience Aléatoire », plus efficace par rapport aux objectifs que nous avons fixés au début de son analyse a priori.

§3. Conclusion de l'analyse de la situation « Expérience Aléatoire »

Le déroulement effectif des activités qui composent cette première situation de notre ingénierie didactique nous a permis d'anticiper quelques conditions didactiques qui favorisent un premier contact avec les situations aléatoires. Nous avons pu dégager la remarque que les deux groupes que nous avons observés, la classe de Troisième et la classe de Seconde, ont pu s'engager dans un processus de modélisation de ces situations grâce à la réalisation effective d'expérimentations.

Remarquons ici que les deux classes avaient le même niveau de connaissances

---

[(68)] Voir §2.5 du Chapitre I.

mathématiques, puisque l'expérimentation pour la classe de Seconde a eu lieu tout au début de l'année scolaire 1999/2000. Les activités pour la classe de Troisième ont été mis en place en mars 1999.

Nous avons pu souligner quelques biais dans les activités proposées qui ont été à la source de difficultés rencontrées par certains élèves. Citons particulièrement la difficulté d'accepter la simulation des expériences « sortie du parking » et « sortie du collège » par un tirage au hasard avec remise. Nous nous proposons d'étudier les conséquences de ces décalages par le déroulement des deux situations didactiques qui suivent l'enchaînement proposé par notre ingénierie.

Les éléments que nous avons pu dégager par l'analyse des activités A_1 et A_2 nous autorisent à mettre en évidence l'importance de la réalisation effective des activités expérimentales. **Ces activités doivent commencer par des observations et des descriptions d'une situation de la réalité**, dans un contexte de la vie courante. Cela nous conduit vers un premier pas pour la validation de notre hypothèse de recherche HR_1, énoncée au paragraphe 1 du Chapitre III :

« Les activités d'observation et de description d'une situation de la réalité sont essentielles pour la construction de la notion d'expérience aléatoire par les élèves et, en conséquence, elles sont essentielles pour le processus de modélisation en jeu ».

La conceptualisation de la notion d'urne de Bernoulli, ainsi que le niveau de mobilisation de la pré-probabilité et la possibilité d'autres habillages pour cette conception spontanée seront étudiés de façon plus profonde dans les chapitres V et VI suivants. Au passage, cela met en évidence l'importance didactique de la notion de pré-probabilité, ainsi que celle de considérer la probabilité comme une notion duale, à appréhender d'emblée avec cette complexité. Nous pensons que cela invalide un enseignement seulement « probabiliste » basé sur la formule de Laplace, ainsi qu'un enseignement seulement « statistique » basé sur l'appréhension fréquentiste. L'urne à pixels, qui sera introduite par la situation didactique que suit, ne s'inscrit pas dans aucune de ces deux démarches. Du fait qu'elle établi très vite le lien entre les deux appréhensions, elle dévient alors un outil didactique de base dans cet enseignement. Nous reviendrons sur ce point dans le Chapitre V.

CHAPITRE V : ANALYSE DE LA DEUXIÈME SITUATION DIDACTIQUE – « URNE À PIXELS »

Introduction

La deuxième situation de notre ingénierie didactique, « Urne à Pixels », vise la mise en œuvre de la démarche de modélisation d'une expérience aléatoire réalisée dans un contexte géométrique vers le modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli. C'est alors un réinvestissement sur cette démarche de modélisation. Dans ce but, les élèves doivent considérer les activités menées lors de la situation « Expérience de Bernoulli » comme un savoir de référence, qui devra être retravaillé lors de sa mobilisation en contexte géométrique dans un environnement informatique.

Les activités qui composent cette situation s'enchaînent avec celles de la situation « Expérience de Bernoulli », conformément à ce que nous avons présenté au paragraphe 2 du Chapitre III.

L'objectif de ce chapitre est d'analyser cette deuxième situation selon la même organisation que pour l'analyse de la situation précédente. Nous la mènerons d'abord d'un point de vue théorique, pour ensuite décrire son déroulement effectif et finalement aboutir à l'analyse a posteriori des activités proposées aux élèves.

Nous nous proposons, ainsi qu'au Chapitre IV, de chercher des éléments qui nous permettront de valider ou bien réfuter l'efficacité de notre ingénierie didactique.

§1. Analyse a priori des activités qui composent la situation « Urne à Pixels »

Objectifs principaux :

- Mettre en place des éléments pour la conceptualisation de la probabilité dans un cadre géométrique. En particulier, il s'agit pour les élèves de :
  - ✓ Dégager l'idée de probabilité à partir de l'observation des fréquences ;
  - ✓ Mettre en œuvre la modélisation d'une situation de probabilité géométrique en termes de rapport d'aires ;
  - ✓ Être confrontés à la dualité entre l'interprétation fréquentielle et l'appréhension laplacienne a priori de la probabilité.

Cette situation est constituée de deux activités qui s'enchaînent, «*discrétisation d'une région délimitée à l'écran* » et « *urne à pixels* ». Ce type d'organisation vise à introduire dans le milieu des éléments qui permettent à l'élève la mise en œuvre de la double démarche d'expérimentation et de modélisation, conformément à notre hypothèse principale, HRP, présentée au Chapitre III.

En effet, l'introduction de l'expérimentation en environnement informatique fournit un autre domaine de la réalité déjà maîtrisé par les élèves, élargissant l'ensemble des éléments concrets que l'élève peut associer à une représentation pseudo-concrète. Nous considérons ici les expérimentations réalisées à l'aide de cet environnement, c'est-à-dire des expérimentations visualisées à l'écran, comme des expériences concrètes appartenant au domaine de la réalité.

Nous faisons l'hypothèse que la familiarité de l'élève avec la géométrie élémentaire est le facteur qui rend cette association entre les éléments géométriques et la représentation pseudo-concrète peu coûteuse. Autrement dit, nous postulons que la reconnaissance de la configuration de figures géométriques simples, ainsi que l'utilisation de leurs propriétés, est disponible chez l'élève en fin de collège, et en particulier l'utilisation des propriétés relatives aux grandeurs « *longueur* » et « *aire* ». Nous attendons que l'élève puisse dégager des relations de proportionnalité entre ces dimensions et les confronter aux fréquences de succès obtenues expérimentalement lorsque l'expérience aléatoire utilise un contexte géométrique, conformément à notre hypothèse de travail HT_2 énoncée au Chapitre III. L'analyse de la première activité montrera l'enchaînement construit afin de favoriser cette mise en relation.

Le dispositif informatique, construit à partir de l'association entre Cabri-géomètre II et Excel, permet de réaliser un très grand nombre d'essais d'une même expérience aléatoire, dans les mêmes conditions, dans un intervalle de temps assez réduit. Ainsi, en plus de l'introduction du contexte géométrique, ce dispositif permet l'accès à un travail plus précis sur la fluctuation d'échantillonnage (au sens de la variabilité des fréquences obtenues expérimentalement). Nous minimisons alors la contrainte de temps lorsqu'on envisage la reproduction d'une expérience aléatoire afin d'analyser ces résultats selon un point de vue statistique en observant la stabilisation des fréquences. La mise en commun des résultats expérimentaux obtenus par l'utilisation de ce dispositif informatique, l'*urne à pixels*, permet la mise en évidence de la nécessité de réaliser un très grand nombre d'observations. Cela permet entre autres d'analyser de façon plus précise la variabilité des fréquences observées. Ainsi que dans la situation A, le rôle de l'enseignant est primordial pour conduire les élèves vers une appréhension plus scientifique du hasard par l'analyse des situations de la réalité dans lesquelles on peut reconnaître son intervention. Autrement dit, l'élève doit analyser la situation aléatoire qu'il veut modéliser selon la possibilité de sa reproductibilité et de sa représentation par un tirage *au hasard* dans une population.

Cette situation est aussi un réinvestissement du savoir-faire introduit par la situation didactique précédente : la mise en œuvre d'un processus de modélisation permettant la représentation d'une situation aléatoire de la réalité par une urne de Bernoulli.

§1.1. Activité B_1 : discrétisation d'une région délimitée à l'écran

§1.1.1. Présentation de l'activité

Cette activité sert à :

(i) Introduire le pixel, d'un point de vue didactique, comme un outil de discrétisation d'une région délimitée à l'écran ;

(ii) Préparer la compréhension du lien entre probabilité géométrique et probabilité laplacienne, lien que nous avons présenté au Chapitre I.

L'activité B_1 commence par une situation de rappel, dont le but est l'homogénéisation des connaissances de la classe relatives à la proportionnalité et à l'aire du rectangle. Le pixel, unité élémentaire d'une image électronique, est ici modélisé selon notre choix didactique comme un petit carré élémentaire dont l'ensemble tapisse l'écran. Nous faisons ainsi appel à l'appréhension perceptive que l'élève peut avoir des pixels : il les conçoit effectivement comme des petits carrés qui recouvrent l'écran. Nous essayons de nous approcher des spécifications du logiciel Cabri-géomètre II en fixant, dans notre modèle, qu'un carré de côtés 1 cm comporte 30 x 30 pixels (cf. §3 Chapitre III et Annexe 4).

L'environnement informatique sera utilisé depuis le début de cette situation didactique, en même temps qu'un travail de justifications à produire par les élèves sur une fiche distribuée par l'enseignant. Ainsi, pour évoluer dans chaque tâche, l'élève doit interagir avec :

- le dispositif informatique (le logiciel Cabri-géomètre II et les connaissances géométriques qu'il introduit dans le contexte prévu pour l'activité) ;
- les contraintes du système didactique en jeu (les éléments de l'énoncé tels que textes et dessins, les partenaires de l'activité qui participent aux échanges intragroupes et intergroupes, les objets matériels utilisés) ;
- les connaissances anciennes telles que proportion, aire et fréquence, supposées stables et donc mobilisables, qui constituent les pré-requis concernant le problème à résoudre.

§1.1.2. Analyse de la tâche

L'activité commence par l'introduction, faite par l'enseignant, de la notion de pixel ainsi que de l'information à propos du logiciel Cabri-géomètre II, construit avec une définition de 30 pixels par centimètre [69]. Cela sert à institutionnaliser le modèle de pixel que nous avons choisi de retenir, conformément à ce que nous avons présenté au paragraphe 3 du Chapitre III. Nous nous plaçons ainsi dans le cadre géométrique dans lequel l'aire d'une région délimitée à l'écran est calculée par le comptage des pixels qui la remplissent.

Cette activité est proposée à partir d'un Cabri-dessin représenté ci-contre : un rectangle ABCD de base horizontale et un segment [EF], perpendiculaire au côté [AB] de ce rectangle, le point E étant un point libre sur [AB]. Les longueurs des segments [AB], [AD] et [AE] sont fournies dans le dessin, ainsi que le nombre de pixels par centimètre.

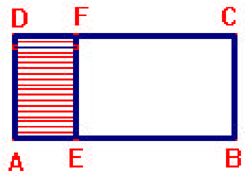


Figure 18

Nous proposons aux élèves, repartis en binômes, la tâche suivante, organisée en trois questions :

a) Soit le rectangle ABCD et le segment [EF] parallèle à [AD], déterminant une partition de ce rectangle. Quelle relation y a-t-il entre les longueurs des côtés et les aires des rectangles AEFD et ABCD ? b) Combien les rectangles ABCD et AEFD contiennent-ils de pixels (bords compris) ? Quelle relation y a-t-il entre le nombre de pixels et les aires de ces rectangles ? c) Déplacez le point E sur le segment [AB]. Que pouvez-vous dire des relations établies dans la tâche précédente ?

Pour que l'élève puisse dégager une relation entre longueurs et aires des rectangles AEFD et ABCD, il doit utiliser la mesure de l'aire d'un rectangle comme produit des mesures de sa longueur et sa largeur. Autrement dit, si nous nommons a_1 la mesure d'aire du rectangle ABCD et a_2 celle du rectangle AEFD, alors $a_1 = AB \times AD$ et $a_2 = AE \times AD$.

La mise en relation des aires et des longueurs est possible par l'explicitation de la proportionnalité entre eux : $\frac{a_2}{a_1} = \frac{AE \times AD}{AB \times AD}$, d'où la conclusion $\frac{a_2}{a_1} = \frac{AE}{AB}$ quelle que soit la position du point E sur le segment [AB]. Cette réponse est accessible à l'élève car les proportions et le calcul de l'aire d'un rectangle constituent des connaissances disponibles en fin du collège.

La deuxième question posée mobilise la notion primitive d'aire comme un comptage des

[69] On adoptera cette définition de Cabri II soit pour l'environnement Macintosh soit pour l'environnement PC comme un choix didactique, même si cette valeur ne correspond pas rigoureusement aux calculs internes de ce logiciel. Les spécifications de ce choix que nous faisons sont présentées au §3 du Chapitre III et à l'Annexe 4.

pixels qui tapissent chacun des rectangles ABCD et AEFD, comme nous l'avons présenté au paragraphe 3 du Chapitre III. Ainsi, l'élève peut déterminer le nombre de pixels compris entre les points-extrémités de chacun des segments [AB], [AD] et [AE] :

- ✓ Nombre de pixels entre A et B : AB x 30 ;
- ✓ Nombre de pixels entre A et D : AD x 30 ;
- ✓ Nombre de pixels entre A et E : AE x 30.

La détermination du nombre de pixels dans chaque rectangle, bords compris, est alors évidente :

- ✓ Pour le rectangle ABCD : AB x AD x 900 ;
- ✓ Pour le rectangle AEFD : AE x AD x 900.

La vérification de la proportionnalité établie à l'item précédent pourra être facilement réécrite pour les aires, considérées comme égales au nombre de pixels recouvrant chacun des rectangles. Il faut ensuite que l'élève effectue quelques déplacements du point E sur le segment [AB], pour construire une formulation plus générale de la relation de proportionnalité cherchée. Cela est immédiat car le nombre de pixels (900) disparaît lors de la simplification de la fraction qui représente le rapport des aires, en revenant à l'expression établie pour l'item (a) de cette activité.

Un contrôle numérique pourra faire partie de la démarche suivie par l'élève, en remplaçant les mesures des segments dans chacune des expressions ci-dessus.

La confrontation entre les deux conceptions d'aire d'un rectangle, celle qui est mobilisée à l'item (a) et celle qui est mobilisée à l'item (c), permet le début de la conceptualisation de la probabilité géométrique : l'élève manipule le rapport d'aires, l'aire étant conçue comme un nombre de pixels et dont la mesure est donnée par le produit de côtés. Cette confrontation permet principalement la mise en évidence de la possibilité de travailler l'aire d'une surface par le lien entre aire et surface discrétisée : il n'est pas nécessaire d'utiliser les mesures en cm^2. L'élève utilise l'aire comme « *le nombre de petits carrés qui tapissent la surface délimitée à l'écran* ».

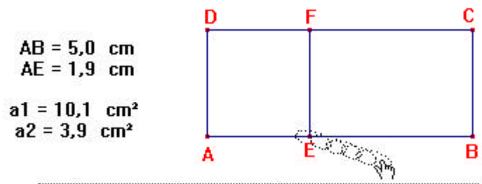
Le rapport d'aires est d'emblée exprimé par :

$$\frac{\text{nombre de pixels qui recouvrent AEFD}}{\text{nombre de pixels qui recouvrent ABCD}} \overset{\text{definition}}{=} \frac{\text{aire de AEFD}}{\text{aire de ABCD}}$$

La mobilisation de notion de proportion est cruciale pour que l'élève puisse réussir à établir la relation demandée par l'énoncé. Cette mobilisation pourra être un effet de contrat car les activités qui composent la situation didactique précédente, « Expérience de Bernoulli », introduisent cette connaissance comme outil de base pour la résolution des problèmes de détermination d'une urne de Bernoulli. Ainsi, même si l'énoncé ne pose pas encore la question de la modélisation, l'élève sait que l'activité est liée à cette démarche et que, par conséquent, il va utiliser la proportionnalité pour résoudre le problème.

Lors de la résolution de l'item (c) l'élève peut rester dans les calculs élémentaires sans chercher à généraliser les résultats ainsi obtenus. Il doit alors produire un très grand nombre de résultats expérimentaux pour pouvoir se construire une conjecture qui met en relation ces valeurs, conduisant à la proportionnalité. Cela est possible, de façon économique, en utilisant des éléments introduits dans contexte par Cabri-géomètre II. D'abord, l'activation de l'outil « calculatrice » permettra de calculer le rapport AE/AB ainsi que le rapport entre les aires a_2/a_1. Le point E est un point libre sur [AB] dans le Cabri-dessin présenté à l'écran. L'élève peut alors le déplacer sur toute la longueur de [AB] et observer les valeurs qui sont affichées, construisant ainsi des conjectures sur la proportionnalité entre ces éléments, aires et longueurs.

Une autre stratégie pour observer les effets du déplacement du point E sur [AB] pourrait mettre en jeu les outils « animation » et « table » dans Cabri-géomètre II. Cela demande, de la part de l'élève, une certaine familiarité avec les fonctionnalités du logiciel : la calculatrice, l'animation d'un point et le remplissage d'une table avec les résultats de cette animation. En conséquence, il est peu probable que cette stratégie soit spontanément mise en œuvre par les élèves auxquels nous proposerons l'activité.



	AE =	a2 =	AE/AB =	a2/a1 =
1	1,7	3,46	0,3439	0,3439
2	1,7	3,4	0,3400	0,3400
3	1,6	3,2	0,3200	0,3200
4	1,5	3,0	0,3000	0,3000
5	1,4	2,8	0,2800	0,2800
6	1,3	2,6	0,2600	0,2600
7	1,2	2,4	0,2400	0,2400
8	1,1	2,2	0,2200	0,2200
9	1,0	2,0	0,2000	0,2000
10	0,9	1,8	0,1800	0,1800

Figure 19

§1.1.3. Connaissances en jeu

Nous avons alors une tâche pour laquelle la technique consiste en réaliser des calculs qui sont justifiés par les connaissances sur la notion de proportion et par l'interprétation géométrique de l'aire d'un rectangle comme le comptage des pixels qui le recouvrent. Ce comptage doit aboutir à l'expression du calcul de l'aire d'un rectangle à partir des mesures de la longueur et la largeur en unités de pixels.

Nous faisons l'hypothèse que les stratégies à développer pour accomplir cette technique sont en rapport avec le niveau de conceptualisation de la proportionnalité chez l'élève :

- ✓ dans un premier niveau, il effectue une démarche semblable au passage d'une appréhension perceptive de la figure donnée par l'énoncé vers une appréhension opératoire, au sens de Duval (1994). Il accepte les résultats numériques, qui ont été obtenus à partir d'un choix préalable de quelques positions arbitraires pour le point E, comme justification de la généralisation demandée. Il calcule alors, à chaque déplacement du point E, le rapport des longueurs, le rapport des aires et le rapport entre le nombre de pixels qui recouvrent chaque rectangle. Ainsi, à partir de la constatation des égalités obtenues, il affirme l'équivalence entre l'aire d'un rectangle comme le produit de deux mesures et comme le comptage des pixels qui tapissent ce rectangle (70) ;
- ✓ dans un deuxième niveau, l'élève peut arriver directement à la formulation générale en mobilisant à la fois le calcul d'aire et le comptage «théorique » des pixels qui tapissent chacun des rectangles.

À ce deuxième niveau, l'élève doit abandonner complètement les comptages effectifs des pixels et le calcul d'aires pour comparer des quantités exprimées en nombres précis. Il doit travailler effectivement dans le cadre algébrique (expression contenant des variables à la place d'une valeur déterminée) :

$$a_1 = [(AB \text{ x } 30) \text{ x } (AD \text{ x } 30)] \Rightarrow a_1 = \text{nombre de pixels qui recouvrent AEFD} \,;$$

$$a_2 = [(AE \text{ x } 30) \text{ x } (AD \text{ x } 30)] \Rightarrow a_2 = \text{nombre de pixels qui recouvrent ABCD.}$$

Alors $\frac{a_2}{a_1} = \frac{AE}{AB}$ ainsi que $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\text{nombre de pixels qui recouvrent AEFD}}{\text{nombre de pixels qui recouvrent ABCD}}$.

Nous signalons que le passage d'un rapport d'aires à un nombre de pixels est le point crucial du passage du continu au discret, et justifie ainsi la démarche de modélisation que nous proposons : une expérience aléatoire présentée en contexte géométrique modélisée par une urne de Bernoulli.

§1.1.4. Conclusion de l'analyse a priori de l'activité B_1

Cette activité est à la base de l'introduction à l'interprétation géométrique de la probabilité, car elle introduit dans le milieu prévu pour cette introduction des éléments qui permettent la mobilisation de la pré-probabilité, conformément à ce que nous avons introduit au Chapitre II. Plus généralement, l'élève peut faire le lien entre la notion d'aire et surface discrétisée non

(70) Remarquons que, à ce niveau, les élèves n'assimilent pas les pixels comme des unités de mesure. La mesure d'aire obtenue en cm^2 n'a pas la même signification que la mesure d'aire obtenue par le comptage des pixels qui remplissent le rectangle en jeu.

seulement dans le cas du rectangle, mais pour tout domaine d'aire mesurable [71], ce qui sera à la base de la modélisation demandée par l'activité B_2 suivante.

L'utilisation de l'environnement informatique de géométrie dynamique permet de mettre en évidence la proportionnalité entre les aires (conçues théoriquement) et le nombre de pixels qui recouvrent chaque rectangle dans l'image électronique. Il est possible, en déplaçant le point E sur le segment [AB], de générer autant de rectangles AEFD que de pixels sur [AB]. L'interprétation géométrique compense l'insuffisance de la stratégie fondée sur les calculs numériques : l'élève ne peut jamais étudier toutes les positions possibles, même s'il utilise l'animation de ce point E sur le segment [AB] comme outil de généralisation.

À la fin de cette activité, les élèves auront acquis des nouvelles connaissances qui ne seront pas encore stables, pour lesquelles l'activité qui suit, « Urne à Pixels », donnera lieu à un réinvestissement. Autrement dit, ces connaissances seront encore parmi les enjeux de l'activité « Urne à Pixels ».

§1.2. Activité B_2 : Urne à Pixels

§1.2.1. Présentation de l'activité

Cette activité sert à :

(i) introduire la notion de probabilité géométrique conçue comme un rapport d'aires ;

(ii) introduire la notion de simulation d'une expérience aléatoire dans un environnement informatique, en associant cette simulation au modèle qui représente cette expérience ;

(iii) introduire le dispositif informatique « urne à pixels » comme outil de simulation d'expériences aléatoires ;

(iv) rendre le dispositif informatique « urne à pixels » fiable pour les activités qui suivent par la comparaison entre la valeur d'une probabilité géométrique et la fréquence des succès obtenues expérimentalement par ce dispositif. La probabilité géométrique est conçue, dans ce contexte, comme la pré-probabilité d'obtenir un succès lorsqu'on choisit un pixel $\wp$ au hasard dans un Cabri-dessin.

Cette activité vise à faire l'association entre le contexte géométrique et les notions introduites par la situation didactique précédente, « *Expérience de Bernoulli* ». Ainsi, la notion d'expérience aléatoire, liée à son protocole expérimental et à la liste des issues

---

[71] Un domaine mesurable sera, dans ce contexte, un domaine contenant un nombre entier de pixels.

possibles, ainsi que la notion d'urne de Bernoulli, seront retravaillées dans le contexte géométrique dans lequel l'activité se développe.

L'activité B_2 introduit le dispositif « *urne à pixels* » comme un outil informatique pour la simulation de l'expérience de référence introduite par la situation A, « Expérience de Bernoulli », le tirage au hasard dans un pot de perles. Ce dispositif devient ainsi un outil de représentation du *modèle d'urne de Bernoulli* par l'assimilation entre les pixels qui recouvrent le rectangle ABCD et les boules qui composent l'urne de Bernoulli. L'élève peut comprendre cette assimilation à partir de l'activité précédente : les pixels considérés comme carrés unitaires qui discrétisent l'écran, et tapissent complètement toutes les régions délimitées dans cet écran.

Soit l'expérience aléatoire « *choisir un pixel* $\tilde{A}$ *au hasard dans le rectangle ABCD* », pour laquelle le résultat obtenu est un succès si « $\tilde{A}$ *tombe dans le rectangle AEFD* ». Rappelons que le pixel $\wp$ est "choisi" au moyen de la fonction Rand, conformément à ce que nous avons présenté au paragraphe 3 du Chapitre III. Cette expérience prend le statut d'expérience de référence lors d'un travail dans un Environnement Informatique pour l'Apprentissage (EIA). Ainsi, l'usage de ce dispositif informatique permet d'introduire la méthode expérimentale pour la résolution ou le contrôle d'une solution donnée lors qu'on travaille dans le cadre géométrique. Nous reviendrons sur ce point plus loin, dans l'analyse de la tâche.

La représentation visuelle des résultats de l'expérience aléatoire ci-dessus fait appel à une macro-construction logique dans Cabri-géomètre II qui aboutit à l'écran sous la forme d'un message :

- ✓ P dans AEFD : 1, si le pixel $\wp$ choisi se situe dans le rectangle AEFD ;
- ✓ P dans AEFD : inexistant, si le pixel $\wp$ choisi ne se situe pas dans le rectangle AEFD.

§1.2.2. Analyse de la tâche

L'activité B_2 consiste en une seule tâche : la détermination de la composition d'une urne de Bernoulli qui représente l'expérience aléatoire : « choisir un pixel $\wp$ au hasard dans le rectangle ABCD », pour laquelle on décide qu'il y a succès si le pixel est dans le rectangle AEFD. Cependant, cette tâche est organisée en trois sous-tâches qui s'enchaînent, de façon à ce que l'élève puisse l'associer à la démarche de modélisation introduite par la situation A, « expérience de Bernoulli » :

(i) observation et description, en vue de la rédaction d'un protocole expérimental qui permet la reproductibilité de l'expérience ;

(ii) description de l'ensemble des issues possibles en termes de succès ($\wp$ appartient à AEFD) ou échec ($\wp$ n'appartient pas à AEFD) ;

(iii) simplification et abstraction de l'expérience : les pixels et les rectangles ABCD et AEFD deviennent objets du domaine pseudo-concret ;

(iv) reconnaissance dans cette expérience de la configuration d'une expérience de Bernoulli ;

(v) utilisation-en-acte de l'hypothèse d'équiprobabilité sur l'ensemble des pixels qui remplissent ABCD. Explicitation de cette hypothèse contractuelle : tous les pixels de ABCD ont « la même chance » d'être choisis ;

(vi) comparaison du calcul a priori (rapport des aires) avec la fréquence de succès obtenue expérimentalement par la mise en fonctionnement du dispositif informatique « urne à pixels » ;

(vii) donnée de la composition d'une urne de Bernoulli pour représenter l'expérience «choisir un pixel $\wp$ au hasard dans le rectangle ABCD» à partir de la comparaison faite à l'item précédent.

L'énoncé fourni aux élèves pour débuter cette démarche est le suivant, en considérant le même Cabri-dessin utilisé lors de l'activité précédente (le dessin et les mesures) :

Soit l'expérience aléatoire «*choisir un pixel* ***Ã*** *"au hasard" dans le rectangle ABCD*». On dira que le résultat est un succès si $\wp$ tombe dans le rectangle AEFD. On a construit dans Cabri-géomètre II une macro-construction « *Pix* » qui réalise cette expérience. Pour activer cette macro, les objets initiaux sont deux côtés consécutifs du rectangle ABCD, par exemple [AB] et [AD]. Faites quelques répétitions pour vous familiariser avec cette macro. Question : Est-il possible de représenter cette expérience aléatoire par une urne de Bernoulli ? Justifiez votre réponse.

La notion d'*expérience aléatoire* décrite par un protocole expérimental et par une liste d'issues possibles est déjà dans le milieu avec lequel l'élève doit interagir pour se construire une description précise permettant la reproduction de l'expérience. Par exemple :

- ✓ Activer la macro-construction « *Pix* » ;
- ✓ Pointer les segments [AB] et [AD] ;
- ✓ Observer la génération aléatoire d'un pixel à l'écran fourni pour cette macro ;
- ✓ Noter si le pixel affiché est dans le rectangle AEFD (succès) ou s'il est hors AEFD (échec).

La reproduction elle-même servira alors de contrôle de la liste de Cabri-commandes construite comme un protocole expérimental, constituant ainsi une validation pragmatique de cette description.

L'élève peut alors reconnaître la configuration d'une expérience de Bernoulli : le choix "au hasard" d'un pixel dans ABCD est une expérience aléatoire à deux issues possibles. L'activité précédente a introduit la notion d'aire comme le nombre des pixels qui recouvrent la figure. L'association-en-acte entre ces pixels et les boules qui composent une urne permet à l'élève de proposer un nombre de boules de chaque couleur pour obtenir une urne qui modélise l'expérience aléatoire en jeu.

Avec les données numériques indiquées, la détermination du nombre de pixels dans chaque rectangle, bords compris, est alors évidente :

- ✓ Pour le rectangle ABCD : AB x AD x 900 $\Rightarrow a_1 = 10 \times 5 \times 900$.
- ✓ Pour le rectangle AEFD : AE x AD x 900 $\Rightarrow a_2 = 4 \times 5 \times 900$.

Encore grâce à l'activité B_1, l'élève peut établir la proportion de boules blanches dans une urne de Bernoulli cherchée : par exemple, 4 boules blanches parmi 10 boules qui composent cette urne. La géométrie des objets donnés permet cette proposition a priori, à condition d'admettre l'équiprobabilité des pixels dans la macro installée, au même titre que l'équiprobabilité théorique des boules dans l'urne.

La validation de cette hypothèse passe par l'utilisation de la macro-construction. Dans une appréhension fréquentiste, c'est un moyen pratique mais aussi très coûteux pour la détermination expérimentale de cette composition. Néanmoins l'élève peut l'utiliser comme un contrôle des calculs qu'il vient de faire : un certain nombre de tirages peuvent lui donner une approximation de la composition qu'il propose, mais peut aussi invalider cette composition, même si la proportion avancée est conforme aux données expérimentales. Cela est une conséquence du fait que l'usage répété manuellement de cette macro-construction ne permet pas à l'élève de réaliser un nombre suffisamment important de tirages pour quantifier l'intervention du hasard dans la réalisation de l'expérience aléatoire. Ainsi, la stabilisation des fréquences de succès ou d'échec n'est pas à cet instant un outil accessible à l'élève. La variabilité des fréquences est alors une propriété-en-acte que l'élève peut constater, mais sans un moyen de la contrôler.

Dans la suite, la démarche expérimentale est introduite par une demande explicite de l'énoncé :

Nous voulons réaliser quelques répétitions de l'expérience aléatoire « *choisir un pixel* $\tilde{A}$ *au hasard dans le rectangle ABCD* ». Dans ce but, nous utiliserons une animation sur le nombre N, qui est un compteur donnant le total de points obtenus à la fin de l'expérimentation. Animez le compteur jusqu'à obtenir N = 50 et notez le nombre de succès obtenus. Répétez l'animation 10 fois.

Les dix répétitions demandées par l'énoncé introduisent dans le milieu la variabilité des fréquences due à l'usage de la fonction Rand, qui fait intervenir le hasard dans l'expérience en cours. Cette tâche permet alors la construction du lien entre cette activité B_2 et l'activité A_2, dans laquelle les élèves ont réalisé la comparaison des résultats obtenus par tous les binômes lorsqu'ils réalisent l'expérience de référence ER [(72)]. Le nombre N fixé sert seulement à unifier le nombre de répétitions de l'expérience dans la classe : il n'a pas un statut de variable didactique dans cette tâche.

Pour la mise en œuvre de la réalisation de cette expérience et l'observation de ses résultats, il faut introduire l'usage d'un tableur dans lequel l'élève va enregistrer les résultats de chaque essai. Cette sous-tâche introduit alors dans le milieu la familiarisation avec l'association entre le tableur et l'outil « table » dans Cabri-géomètre II : le résultat de chaque essai réalisé sera enregistré dans une Cabri-table, qui sera ensuite transférée dans une feuille Excel afin de calculer le nombre total d'essais, le nombre de succès et la fréquence de ces succès. Cette association et son fonctionnement ont été décrits au paragraphe §3 du Chapitre III.

L'élève aura ainsi à l'écran, pour chaque série de T essais (T = 50), le nombre S et la fréquence S/T de succès obtenus. À la fin des 10 répétitions des séries de 50 essais, il aura rempli la table ci-dessous :

Tableau 14

	Nb total de points obtenus	Nb succès	Nb cumulé de points (T)	Nb cumulé de succès (S)	Rapport S/T
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Cette table à remplir est fournie à l'élève avec l'énoncé. Elle sert à faire le lien avec

[(72)] ER : « choisir au hasard une perle dans un pot rempli de perles bleues et rouges », cf. activité A_2.

l'activité précédente B_1, dans laquelle il a montré l'égalité entre les rapports $\frac{a_2}{a_1}$ et $\frac{\text{nb de pixels qui recouvrent AEFD}}{\text{nb de pixels qui recouvrent ABCD}}$.

En effet, on peut attendre de l'élève qu'il fasse la conjecture selon laquelle le rapport S/T est une approximation de la valeur obtenue par le rapport d'aires. Pour valider cette conjecture, il suffit à l'élève de calculer ces deux rapports et de faire ainsi la comparaison, en prenant en compte la variabilité des fréquences présente dans les résultats expérimentaux. C'est alors la première fois que l'élève utilise explicitement l'approche fréquentiste. En conséquence, c'est la première fois qu'il est confronté à la dualité de l'approche de la notion de probabilité, comme nous l'avons indiqué au Chapitre I. C'est une confrontation-en-acte faite par la comparaison spontanée entre le rapport d'aires obtenu dans la tâche précédente et les fréquences qu'il vient d'obtenir expérimentalement.

Du fait que l'énoncé ne demande pas explicitement cette comparaison entre les divers rapports, l'enseignant aura alors à sa charge sa mise en évidence. Son rôle est ainsi fondamental pour la suite du travail : la construction du lien entre la probabilité géométrique, la probabilité laplacienne (probabilité a priori) et la probabilité estimée à partir des fréquences (probabilité a posteriori) est une conséquence de cette comparaison. L'enseignant pourra aussi rendre disponibles les résultats obtenus pour tous les binômes de la classe, de façon à augmenter le nombre d'essais réalisés effectivement et, en conséquence, pourra mettre en évidence la tendance à la stabilisation du rapport S/T.

Revenons sur ce point. Pour chaque binôme, le nombre total d'essais est de 50 x 10, soit, 500 essais. Cette valeur pourra s'avérer insuffisante pour la vérification de la stabilisation du rapport S/T, fréquence de succès obtenus. La mise à disposition des résultats des autres binômes permet d'augmenter le nombre d'essais d'à peu près 15 fois, en supposant une classe de 30 élèves, et donc de 15 binômes. Cela nous donne 7500 essais, nombre suffisant pour une vérification raisonnable de la stabilisation des fréquences, et donc, pour la validation de la possibilité d'estimer le rapport entre les aires des rectangles AEFD et ABCD par cette procédure expérimentale.

Les tableaux ci-dessous, qui contiennent des résultats expérimentaux que nous avons obtenu nous-mêmes, illustrent l'importance de cette mise à disposition des résultats afin de dégager la stabilisation de la fréquence.

a) Les résultats obtenus par un binôme (10 x 50 essais).

Tableau 15

	Nb de points obtenus	Nb de succès	Nb cumulé de points (T)	Nb cumulé de succès (S)	Rapport S/T
1	50	22	50	22	44,0%
2	50	22	100	44	44,0%
3	50	15	150	59	39,3%
4	50	20	200	79	39,5%
5	50	17	250	96	38,4%
6	50	18	300	114	38,0%
7	50	20	350	134	38,3%
8	50	23	400	157	39,3%
9	50	23	450	180	40,0%
10	50	14	500	194	38,8%

b) Les résultats obtenus par 15 binômes (15 x 500 essais).

Tableau 16

	Nb de points obtenus	Nb de succès	Rapport S/T	Nb cumulé de points (T)	Nb cumulé de succès (S)	Rapport cumulé S/T
1	500	200	40,0 %	500	200	40,0%
2	500	204	40,8 %	1000	404	40,4%
3	500	218	43,6 %	1500	622	41,5%
4	500	187	37,4 %	2000	809	40,5%
5	500	182	36,4 %	2500	991	39,6%
6	500	195	39,0 %	3000	1186	39,5%
7	500	191	38,2 %	3500	1377	39,3%
8	500	220	44,4 %	4000	1597	39,9%
9	500	199	39,8 %	4500	1796	39,9%
10	500	193	38,6 %	5000	1989	39,8%
11	500	190	38,0 %	5500	2179	39,6%
12	500	217	43,4 %	6000	2396	39,9%
13	500	196	39,2 %	6500	2592	39,9%
14	500	194	38,8 %	7000	2786	39,8%
15	500	204	40,8 %	7500	2990	39,9%

Remarquons ainsi que cette démarche rend le dispositif informatique fiable pour la suite de la séquence didactique en cours pour devenir un outil lors de la résolution de l'activité qui suit.

La dernière sous-tâche de cette activité est la mise en place de l'expérience «*choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD*» comme l'expérience de référence dans l'environnement informatique. Elle complète le processus de modélisation de cette expérience par une urne de Bernoulli :

a) L'expérience aléatoire de choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD, est-elle équivalente au tirage au hasard d'une perle dans un pot qui contient des perles blanches et des perles noires ?
b) Quelle urne de Bernoulli proposez-vous pour la modéliser ? Justifiez votre réponse.

L'énoncé donné induit déjà la correspondance entre perles et pixels, les deux objets du domaine de la réalité qui renvoient aux boules qui composent une urne de Bernoulli. Puisque les élèves ont déjà réalisé l'assimilation entre perles et élèves, ou encore entre perles et objets présentés lors de la dernière tâche de l'activité A2, nous faisons l'hypothèse que l'assimilation entre pixels et perles ne leur posera pas de problème.

En conséquence, le rectangle ABCD est l'objet représentant l'urne de Bernoulli et les pixels qui recouvrent le rectangle AEFD sont les objets représentant les boules blanches qui désignent le succès de l'expérience aléatoire.

Désignons l'expérience aléatoire « *choisir un pixel* $\tilde{A}$ *au hasard dans le rectangle ABCD* » par « *UP* ». Nous souhaitons que l'élève établisse une correspondance entre UP et ER, selon l'environnement dans lequel on réalise l'expérimentation, de façon à ce qu'il mobilise les savoir-faire introduits par la situation didactique « Expérience de Bernoulli ». Cette mise en correspondance nous amène à donner le statut d'expérience de référence à UP lorsque l'expérimentation se déroule dans un Environnement Informatique pour l'Apprentissage. L'assimilation entre UP et ER est introduite dans le milieu par un contrat rendu crédible par les manipulations successives et par l'hypothèse d'équiprobabilité entre les pixels (cf. §3 du Chapitre III).

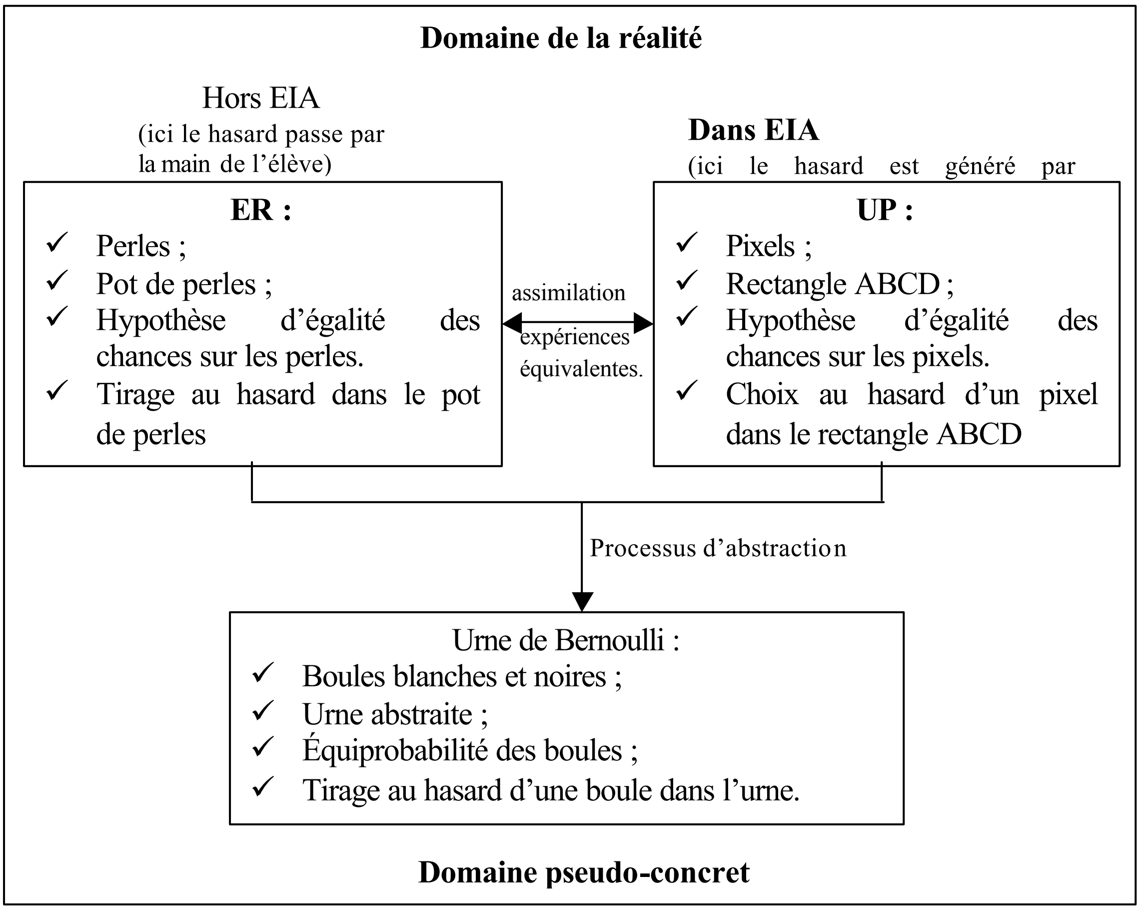


Schéma 18

L'élève peut ainsi justifier par cette mise en relation la réponse affirmative pour la question posée à l'item (a) de cette tâche.

Pour répondre à l'item (b) et donner la composition d'une urne de Bernoulli commune à ER et à UP, l'élève peut faire appel à l'association qu'il vient d'établir entre ces deux expériences de référence. Il peut alors prendre une décision fondée sur la comparaison entre les résultats expérimentaux et le calcul a priori du rapport entre a_2 et a_1, même s'il travaille dans un environnement autre que celui de la situation « Expérience de Bernoulli ». La possibilité de contrôler les résultats expérimentaux par les calculs a priori et vice-versa a été introduite par la tâche précédente, particulièrement par l'intervention de l'enseignant lors de sa mise en commun.

Du point de vue du savoir en jeu dans une interprétation praxéologique (Chevallard, 1996 et 1999), la technique qui résout cette tâche est décrite ci-dessous. La technologie qui rend cette technique intelligible est l'ensemble de notions et propriétés en acte sur la pré-probabilité, notions introduites par la première situation didactique de notre ingénierie.

a) déterminer le rapport a_2/a_1 ;

b) comparer la valeur de ce rapport avec le tableau qui contient les résultats expérimentaux de la classe.

Les stratégies que l'élève peut engager pour accomplir cette technique peuvent varier, selon la familiarité avec le logiciel Cabri-géomètre II :

(i) il peut obtenir les aires au moyen de l'outil « aire » dans le menu. Le résultat prend alors en compte les décimaux cachés dans les valeurs affichées à l'écran pour les longueurs des côtés de chacun des rectangles ;

(ii) il peut calculer chacune des aires en prenant exactement les valeurs affichées à l'écran ;

(iii) il peut analyser l'ensemble de résultats du tableau expérimental afin de dégager une tendance de stabilisation des fréquences ;

(iv) il peut faire un calcul statistique, tel que déterminer la moyenne des effectifs obtenus expérimentalement.

(v) il compare les résultats, en mettant en relation les deux méthodes développées (le calcul a priori du rapport d'aires et la démarche expérimentale permettant obtenir les fréquences de succès).

Observons que les résultats obtenus par (i) et (ii) ne sont pas nécessairement égaux, même s'ils peuvent être assez proches. Le contrat didactique établi pour l'analyse des erreurs de mesures lors d'un travail en géométrie peut éliminer cette difficulté et conduire l'élève à accepter ces approximations.

Les stratégies sont alors exprimées dans le tableau ci-dessous et expliquées dans la suite :

Tableau 17

	Rapport d'aires	
Analyse des fréquences	**(i)**	**(ii)**
(iii)	(i, iii) → v	(ii, iii) → v
(iv)	(i, iv) → v	(ii, iv) → v

Les quatre stratégies identifiées sont équivalentes du point de vue des connaissances préalables qui sont mobilisées (fréquences et proportions). En revenant sur les tableaux donnés comme exemples de 500 résultats puis de 7500 résultats, nous pouvons interpréter chacune des stratégies identifiées dans le tableau ci-dessus.

- Stratégie (i, iii) : l'élève obtient les aires des rectangles ABCD et AEFD par l'outil « aire » dans le Cabri-menu et il essaye de dégager une stabilisation des fréquences à partir des résultats expérimentaux. Alors, s'il analyse les deux tableaux (les 500 résultats et les 7500 résultats), il peut retenir une stabilisation autour de 39,9 % de succès pour l'expérience aléatoire répétée, car c'est la dernière valeur de la fréquence observée indiquée dans le tableau. Cette valeur peut être contrôlée par le rapport a_2/a_1, dont les valeurs sont fournies par Cabri-géomètre II, en l'occurrence 0,4.

Observons que la valeur de la fréquence stabilisée est assez proche de la valeur a_2/a_1, obtenue par l'usage des Cabri-outils. En conséquence, l'élève pourra proposer par exemple une urne de Bernoulli composée de 40 boules blanches et 60 boules noires ou toute autre composition présentant la même proportion de boules blanches. Cette proposition est suffisamment proche de la valeur observée (39,9 %) pour que le modèle d'urne ainsi retenu soit acceptable.

- Stratégie (i, iv) : l'élève utilise les Cabri-outils pour obtenir le rapport a_2/a_1, comme dans la procédure décrite par la figure ci-dessus, et il compare les résultats avec la moyenne des fréquences obtenues expérimentalement après les 500 essais (10 x 50 essais). C'est un effet de contrat, car le programme de statistique introduit la moyenne comme outil pour résumer un ensemble de valeurs qui composent une série statistique. Dans cette stratégie, l'élève calcule d'abord la moyenne des effectifs (moyenne du nombre de succès obtenus) puis il la transforme en pourcentage afin de réaliser la comparaison avec le rapport d'aires. Dans l'exemple donné plus haut, nous avons deux valeurs possibles, selon la table que l'élève considère. Pour la première table qui contient les résultats de 500 essais, il aura une moyenne de 19,4 succès pour l'ensemble 50 essais, et en conséquence, une fréquence de 38,8 %. Pour la table contenant 7500 essais, il aura une moyenne de 199,33 succès pour l'ensemble de 500 essais, et en conséquence, une fréquence de 39,9 %. L'urne de Bernoulli aura alors la même composition que celle que l'élève peut construire à partir de la stratégie précédente.

- Stratégie (ii, iii) et stratégie (ii, iv) : l'élève calcule les aires lui-même, à partir des valeurs affichées à l'écran. Il aura alors $a_1 = 50\ cm^2$ et $a_2 = 20\ cm^2$, ce qui donne un rapport, exprimé en pourcentage, de 40 %. La comparaison avec les résultats expérimentaux est alors un contrôle de ses calculs.

Dans l'expérimentation, les élèves obtiendront différentes valeurs pour la fréquence stabilisée. Ce fait peut intervenir de manière positive dans l'apprentissage de la modélisation : plusieurs modèles approchés peuvent être proposés en fonction des résultats expérimentaux et de leurs fluctuations aléatoires.

§1.2.3. Connaissances en jeu

Tel que pour la Situation A, la mise en œuvre d'une stratégie adéquate pour que l'élève puisse accomplir la technique envisagée demande la mobilisation de la notion de :

- ✓ Proportion comme outil de comparaison entre données numériques ;
- ✓ Aires de rectangles, particulièrement, le rapport d'aire entre deux rectangles ;
- ✓ Connaissances statistiques de base, tels que population, effectif et fréquence.

L'enjeu de l'activité est l'installation, chez l'élève, d'une approche de la probabilité à partir d'un travail sur la pré-probabilité (conception spontanée, cf. Chapitre II). Ce travail, déjà entamé par l'activité A_2, doit conduire à un élargissement du domaine de validité de la pré-probabilité vers un champ de problèmes se présentant dans le cadre d'une interprétation géométrique de la probabilité. Ainsi la pré-probabilité, d'un rapport d'entiers estimant les chances d'un succès, passe à un rapport d'aires dans le cadre géométrique. Ce passage est considéré lui aussi en-acte comme estimant les chances de succès quand on prend un point au hasard dans un domaine, le lien entre les deux passant par la discrétisation. Le langage et les représentations, dans cette nouvelle conception, est celle de l'interface avec un Environnement Informatique pour l'Apprentissage (EIA). En l'occurrence l'EIA est ici constitué par Cabri-géomètre II, particulièrement le dispositif informatique « Urne à Pixels », décrit au §3 du Chapitre III.

Nous attendons alors qu'à la fin de cette activité l'élève soit capable de modéliser une expérience aléatoire, présentée dans un EIA, par un modèle d'urne de Bernoulli au moyen de la discrétisation des surfaces, introduite par l'activité précédente B_1.

§1.2.4. Conclusion de l'analyse a priori de l'activité B_2

Cette activité constitue un réinvestissement de la notion de pré-probabilité dans un environnement informatique : l'élève doit donner la composition d'une urne de Bernoulli et donc, indiquer les chances d'obtenir un succès à partir d'une proportion connue des objets-issues matérialisant le succès dans un prélèvement au hasard. Les tâches précédentes de cette situation didactique l'autorisent à utiliser soit le rapport des aires, soit le rapport entre le nombre de pixels, soit une estimation de ce rapport par l'analyse des résultats expérimentaux.

À l'issue de cette situation, l'élève doit pouvoir dégager l'équivalence entre les divers générateurs de hasard : le hasard intrinsèque à la situation de la réalité observée, le hasard d'un tirage dans un pot de perles par une "main innocente" et le hasard engendré par la fonction rand dans l'environnement informatique. Par exemple :

✓ pour la situation de la réalité « sortie du collège », le hasard intervient dans la détermination des élèves observés à la sortie du bâtiment. Ce hasard est considéré comme non-contingent dés lors que les élèves non identifiés sont considérés comme appartenant à une population statistique. C'est-à-dire que la situation dans laquelle il intervient est reproductible et la situation « sortie du collège » est considérée comme une expérience aléatoire à deux issues possibles ;

✓ pour le tirage dans le pot de perles, le hasard intervient lors du tirage d'une perle dans ce pot. Cette expérience est aussi une expérience aléatoire à deux issues possibles ;

✓ pour la mise en fonctionnement du dispositif informatique « urne à pixels », l'usage de la fonction « *rand* » rend aléatoire le choix du pixel $\wp$. En conséquence, l'expérience UP est aussi une expérience aléatoire.

La question de fond est celle de la pertinence de l'hypothèse d'équiprobabilité (rigoureusement réalisé ou non) posée sur la population étudiée.

L'activité permet un réinvestissement sur le concept d'urne de Bernoulli au moyen de l'introduction de l'urne à pixels, objet informatique qui devient un signe de ce concept. Nous avons alors une situation aléatoire à modéliser qui est présentée dans un contexte différent de celui de la situation de la sortie du parking ou de la sortie du collège. Ce changement de contexte, et par conséquent, le changement de générateur de hasard pris en compte pour l'expérience aléatoire, peut faciliter la décontextualisation du modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli. Finalement, cette décontextualisation sera elle-même cruciale pour la construction de la notion abstraite de modèle de Bernoulli.

§2. Déroulement et analyse a posteriori des activités qui composent la situation « Urne à Pixels »

Pour cette analyse, nous reprenons l'organisation des groupes des élèves comme nous l'avons présenté au Chapitre IV : le premier groupe constitué par la classe de Troisième et le deuxième groupe constitué par la classe de Seconde.

L'environnement informatique pour les deux groupes a été organisé en associant Cabri-géomètre II et Excel. Par contre, l'artefact n'a pas été le même : le premier groupe a travaillé avec la calculatrice TI-92 et le deuxième groupe avec des ordinateurs PC. Cette différence est due à des contraintes d'équipement informatique, car le premier groupe n'avait pas la possibilité d'utiliser des ordinateurs adéquats pour l'usage simultané des logiciels nécessaires à la mise en place de cette activité. Nous envisageons alors de dégager les conséquences didactiques de ce changement d'artefact sur les stratégies développées par les élèves lors de la résolution des exercices proposés dans le contexte géométrique.

§2.1. Activité B_1 : discrétisation d'une région délimitée à l'écran

§2.1.1. Les questions auxquelles nous voulons répondre

En reprenant l'analyse a priori de cette activité, nous nous posons une question à laquelle nous souhaitons répondre au moyen des éléments dégagés par cette analyse a posteriori :

- Les élèves reconnaissent-ils l'équivalence entre pixel et cm² pour mesurer l'aire d'une figure représentée à l'écran ?

Autrement dit, nous souhaitons repérer si les élèves mobilisent la notion élémentaire d'aire du rectangle (comptage des pixels qui le remplissent). Dans leur scolarité élémentaire, ils ont caractérisé l'aire d'un rectangle comme le « *produit de la longueur par la largeur* ».

En effet, la réponse à cette question ne sera possible que par l'analyse de l'activité B_2, « Urne à Pixels ». Dans cette activité, les élèves doivent mobiliser leurs conceptions d'aire pour donner la composition d'une urne de Bernoulli modélisant l'expérience aléatoire « *choisir au hasard un pixel* $\tilde{A}$ *dans le rectangle ABCD* ».

Les productions des élèves lors du déroulement de l'activité B_1 nous fourniront plutôt des renseignements sur l'habitude des élèves lors d'un travail sur les proportions dans un contexte géométrique, ce qui constituera un point de départ pour répondre à la question posée plus haut.

§2.1.2. Le déroulement effectif de l'activité

<u>Premier Groupe : Classe de Troisième.</u>

La séance a commencé par un bref rappel sur les notions d'expérience aléatoire, d'urne de Bernoulli et d'expériences équivalentes (que l'enseignant a présenté comme des expériences comparables).

L'enseignant distribue aux élèves la fiche contenant les deux tâches qui composent cette activité et le dessin du rectangle évoqué par l'énoncé.

Soit le rectangle ABCD de côtés 10,0 cm et 5,0 cm. Soit le segment [EF] parallèle à [AD], déterminant une partition de ce rectangle. Dans un premier temps, on suppose que AE = 4,0 cm

Tâche 1 : montrez que la proportion donnée par $\frac{\text{aire AEFD}}{\text{aire ABCD}} = \frac{\text{AE}}{\text{AB}}$ est correcte, quelle que soit la position du point E sur [AB].

Tâche 2 : que pouvez-vous dire du rapport entre le nombre des pixels situés à l'intérieur du rectangle AEFD et le nombre des pixels recouvrant ABCD ?

Remarquons d'abord le changement de formulation par rapport à celui que nous avons présenté dans l'analyse a priori. Cette nouvelle formulation a été un choix fait en accord avec l'enseignant, et son but était de rendre la tâche plus explicite : « montrer la validité de la proportion donnée ». nous avons supposé que la formulation originelle de l'énoncé, « quelle relation y a-t-il … » était trop floue pour les élèves en niveau de Troisième. Un autre changement par rapport à ce que nous avons présenté dans l'analyse a priori concerne de l'environnement informatique. Les élèves de Troisième ont eu comme contexte pour la résolution de cette tâche l'environnement papier/crayon, et en conséquence, les rétroactions dues à l'usage de la géométrie dynamique n'ont pas pu avoir lieu. Citons le déplacement du point E, par exemple.

La durée du travail intragroupe pour la première tâche était de 10 min. Après ce temps de travail en groupe, l'enseignant a proposé la mise en commun des réponses. Parmi les solutions proposées lors du travail intergroupe, nous remarquons une résistance de la part des élèves à sortir du cadre numérique. Ils proposent des preuves pragmatiques et non intellectuelles pour montrer la validité de la proportion donnée. Autrement dit, ils proposent une validation de cette proportion à partir des valeurs fournies par l'énoncé. Ainsi, si l'expression était $\frac{\text{aire AEFD}}{\text{aire ABCD}} = \frac{\text{AE}}{\text{AB}}$, ils font la substitution $\frac{20}{50} = \frac{4}{10}$ et valident cette première expression par la mobilisation de la procédure « produit en croix ». On a trouvé ce type de preuve chez six binômes, parmi les onze qui participaient de l'activité. Parmi ces six binômes, nous avons pu en observer un qui prend en compte la contrainte «*quelle que soit la position du point E sur [AB]* ». Ce binôme propose alors un deuxième exemple construit à partir d'une valeur attribuée par eux-mêmes pour la longueur du segment [AE] :

Sabrina/Alexia :

$$\left.\begin{array}{l} 1°)\quad \frac{20}{50} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ 2°)\quad \text{soit AE}' = 7 \\ \frac{\text{aire AE'FD}}{\text{aire ABCD}} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10} \end{array}\right\} \text{C'est correcte quelle que soit la position du point E sur [AB]}$$

Parmi les onze binômes qui ont proposé une résolution de cette tâche, seulement trois binômes ont donné une résolution conforme à nos attentes et en fournissant une réponse qui n'était pas limitée à des exemples numériques. Ainsi, même si ces élèves sont partis d'une vérification pragmatique à partir des valeurs fournies par l'énoncé, ils ont réussi à se dégager de ces valeurs vers une formulation générale. Citons l'exemple du binôme Anne/Morgane. Lorsqu'elles ont commencé la recherche d'une stratégie pour résoudre la tâche, elles sont parties d'une vérification pragmatique. Cette vérification provoque alors un blocage : elles savaient qu'elle ne suffisait pas, mais elles n'arrivaient pas a construire la suite du raisonnement. L'enseignant est intervenu en posant la question *« comment on peut généraliser ? Comment on calcule l'aire ? »*. Cette intervention a eu un rôle de rappel sur le calcul d'aire selon l'expression «*longueur x largeur* », et la réponse que ces élèves produisent dans leur fiche est la suivante :

Anne/Morgane : A (ABCD) = AD x AB   A (AEFD) = AD x AE

$$\frac{\text{aire AEFD}}{\text{aire ABCD}} = \frac{\cancel{\text{AD}} \text{ x AE}}{\cancel{\text{AD}} \text{ x AB}} = \frac{\text{AE}}{\text{AB}}$$

Nous dégageons de l'analyse des réponses données par les binômes une certaine difficulté pour sortir d'un travail dans le domaine de la réalité, ici représenté par un travail sur le dessin qui a accompagné l'énoncé. Quelques élèves ont même utilisé leur règle pour mesurer le dessin fourni et ainsi confirmer les valeurs présentes dans l'énoncé.

La deuxième tâche de cette activité introduit la notion de pixel. Pour répondre aux questions posées par les élèves, l'enseignant a proposé l'explication suivante :

> Prof : Un pixel …euh … un pixel c'est un point carré. Quand on entend parler de pixels ? Où on trouve les pixels ?
>
> Élèves : ordinateur … télé …
>
> Prof : Regarde, on peut dire que c'est un petit spot lumineux. Donc quand vous regardez l'écran d'un ordinateur, l'écran d'une calculatrice, l'écran d'une télé, en fait, ils comportent un certain nombre de pixels. Alors quand je mesure par exemple cette feuille-la, habituellement je peux prendre comme unité le centimètre carré. Ça veut dire que je regarde combien de centimètres carrés il y a dans cette feuille. Je pourrais très bien prendre sur l'écran de la télé, au lieu de prendre en centimètre carré, prendre en pixels. Le pixel est une unité bien particulière, d'accord ? Donc, vous allez avoir votre écran qui va avoir un certain nombre de pixels.

Remarquons que dans son discours, l'enseignant a évoqué la notion fondamentale d'aire lorsqu'il a dit « je regarde combien de centimètres carrés il y a dans cette feuille ». Les réponses fournies par les binômes montrent que ce bref rappel n'a pas été suffisant pour que ces élèves puissent donner un sens à l'objet « pixel » en tant qu'unité élémentaire d'aire. Ils ne comprennent pas le modèle de pixel proposé par l'activité : un petit carré d'unité élémentaire (le « point carré » évoqué par l'enseignant au début de son intervention).

L'enseignant est revenu à ce modèle en proposant une sorte d'institutionnalisation :

Prof : Le pixel est un petit carré.

Les réponses fournies par les binômes montrent que sept binômes sur onze sont restés bloqués. Le tableau ci-dessous contient toutes les réponses que nous avons obtenues pour cette tâche.

Tableau 18

Binôme	Réponse
Sabrina/Alexia	Il y a 2/5 de pixels en plus dans ABCD que dans AEFD.
Frederic/Guillaume	Le nombre de pixels recouvrant AEFD est proportionnel à la longueur de AE. La relation entre le nb de pixels d'AEFD et d'ABCD est la même que celle entre AE et AB et celle entre l'aire d'AEFD et l'aire d'ABCD.
Benjamin/Laurent	NR
Maxime/Vincent/Nicolas	NR
Anne/Morgane	$\frac{\text{nb de pixels d'AEFD}}{\text{nb de pixels d'ABCD}} = \frac{\text{AEFD}}{\text{ABCD}} = \frac{\text{AE}}{\text{AB}}$
Aurélie/Marilyne	NR
Nadège/Jessica	NR
Zubeydé/Jessica	$\frac{\text{AE}}{\text{AB}} = \frac{\text{nbres de Pixels}}{\text{nbres de Pixels}}$
Audray/Camille	Il y a 2/5 de pixel. (elles avaient écrit et effacé : il y a le même nombre de pixels qui recouvrent AEFD et ABCD).
Florence/Elise	$\frac{\text{aire AEFD}}{\text{aire ABCD}} = \frac{\text{AE x }\cancel{\text{AD}}}{\text{AB x }\cancel{\text{AD}}} = \frac{\text{AE}}{\text{AB}} = \frac{\text{nbre de pixels}}{\text{nbre de pixels}}$
Loïc/Xavier	Le nombre de pixels dans AEFD représente 40 % du rectangle ABCD.

Remarquons que 3/11 de ces binômes donnent la bonne relation entre les pixels qui recouvrent chaque rectangle et l'aire de ces rectangles (Frederic/Guillaume, Anne/Morgane et Loïc/Xavier). Ces trois binômes avaient déjà réussi a montrer la validité de la proportion de la tâche 1 en travaillant au sein de la configuration de rectangle.

En analysant la réponse donnée par le binôme Sabrina/Alexia nous pouvons faire la conjecture de l'existence d'une conception de la proportion dont le domaine de validité n'est pas conforme à celui du savoir savant : elles donnent une interprétation additive de la proportion.

Sabrina/Alexia : Si $\frac{\text{aire AEFD}}{\text{aire ABCD}} = \frac{2}{5}$ alors il y a 2/5 de pixels en plus dans ABCD que dans AEFD.

Notre recherche n'envisage pas l'étude des conceptions des élèves au niveau Troisième sur la proportion, mais nous faisons l'hypothèse que ces conceptions peuvent intervenir sur la conceptualisation de la notion d'urne de Bernoulli et par suite celle de probabilité.

<u>Deuxième groupe : Classe de Seconde.</u>

La séance se déroule dans une salle informatique dans laquelle nous avons placé un binôme par ordinateur. Du fait que cette activité a été menée dans un horaire destiné à des modules, nous avons eu une séance de 1h30 pour chaque groupe de module. Ainsi, nous avons eu six binômes pour le premier groupe et huit binômes pour le deuxième, le même jour lors des séances consécutives. À cause de cet emploi de temps, les élèves du deuxième groupe n'ont pas eu le temps de prendre connaissance des activités menées en classe pendant la séance du premier groupe.

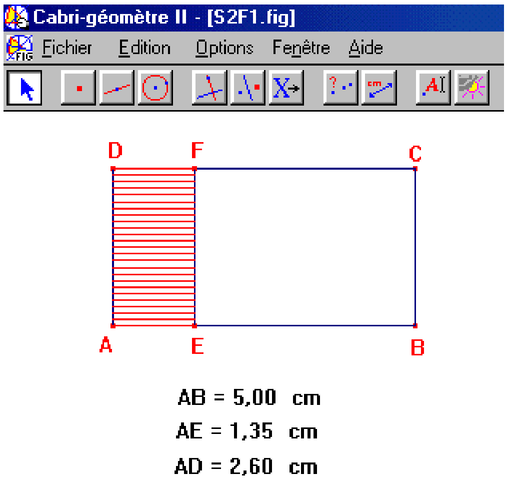
La gestion choisie par l'enseignant a été de laisser les élèves travailler de façon autonome sur chaque tâche, en faisant des interventions ponctuelles pour chaque binôme, selon leur demande. En conséquence, nous ne dissocierons pas les deux groupes au cours de cette analyse.

Une caractéristique importante de la classe de Seconde que nous avons observée est que les élèves n'avaient pas encore maîtrisé la manipulation du logiciel Cabri-géomètre II, c'est-à-dire les possibilités de manipulation et de traitement d'un Cabri-dessin. Cela vient du fait que les séances de notre ingénierie didactique ont eu lieu pendant le mois de septembre, 1999, en début de l'année scolaire.

L'enseignant commence la séance par quelques renseignements techniques à propos de la gestion de fenêtres à l'écran. Ensuite, il distribue aux élèves les fiches contenant les tâches à résoudre.

La première consigne consistait à ouvrir le logiciel Cabri-géomètre II et, ensuite, la barre d'outils S2. Cette barre comportait un outil « Pix », qui permettait d'activer la macro-construction « Pix », dont les objets initiaux étaient deux côtés consécutifs du rectangle ABCD et dont le résultat était un pixel placé au hasard dans ce rectangle. Nous avons aussi mis en évidence l'outil « animation » et nous avons enlevé touts les outils de mesure.

Dans Cabri, ouvrez la figure S2F1.



<u>Exercice 1</u> : Soit le rectangle ABCD et le segment [EF] parallèle à [AD], déterminant une partition de ce rectangle. Quelle relation y a-t-il entre les longueurs des côtés et les aires des rectangles AEFD et ABCD ?

<u>Exercice 2 :</u>

a) Combien les rectangles ABCD et AEFD contiennent-ils de pixels (bords compris) ?

b) Quelle relation y a-t-il entre le nombre de pixels et les aires de ces rectangles ?

Après quelques questions posées individuellement par les binômes, l'enseignant a introduit de façon collective la notion de pixel :

> Prof : Il faut pas que vous soyez gêné par le mot « pixel ». Un pixel c'est tout simplement la plus petite chose qu'on fait sur l'écran. C'est un point, en gros. Donc, en fait, on va compter les pixels et c'est comme compter les points. Et on vous donne l'information qui est importante : il y a 30 pixels par centimètre. Sur 1 cm il y a 30 pixels.

Après avoir cherché l'outil « Aire » dans le menu de Cabri, un des binômes a demandé à l'enseignant comment ils pouvaient calculer l'aire avec le logiciel.

> Élève : Monsieur, comment on fait pour trouver l'aire ?
> Prof : L'aire du rectangle, on multiplie sa longueur par sa largeur.
> Élève : Mais il n'y a pas une touche …
> Prof : On a exprès enlevé les mesures de longueur et d'aire, justement pour que vous y réfléchissiez.

Nous dégageons du discours de l'enseignant une demande implicite aux élèves d'un travail qui ne soit pas limité à la formulation d'une preuve pragmatique consistant à calculer quelques valeurs à partir des mesures disponibles à l'écran : « *on a exprès enlevé les mesures pour que vous y réfléchissiez* ».

En observant qu'il avait encore des binômes qui restaient bloqués ou se perdaient dans les calculs portant sur des valeurs numériques sans chercher une stratégie pour aboutir à la généralisation envisagée par la tâche, l'enseignant a fait une nouvelle remarque collective :

> Prof : Vous avez remarqué que les deux rectangles ont la même largeur …

Après cette remarque de l'enseignant, on a pu observer que quelques binômes ont commencé une recherche de généralisation de la mise en relation demandée par cette première tâche de l'activité.

Même si les élèves ont utilisé une démarche numérique pour construire leur stratégie, nous remarquons que cette démarche diffère de celle utilisée par la plupart des élèves de la classe de Troisième. En effet, le changement d'énoncé a eu un rôle crucial : les élèves n'avaient pas à montrer une « propriété » qu'ils savaient déjà vraie. Au contraire, ils devraient formuler une mise en relation entre aires, longueurs et le nombre de pixels de chacun des rectangles. Suite à une erreur de manipulation non décelée au moment de la séance, les élèves ont eu accès à la mesure AD. En conséquence, ils ont eu les mêmes stratégies numériques que les élèves de Troisième. Citons la solution proposée par le binôme Jérémy/Etienne :

> Jérémy/Etienne : Lorsque l'on divise AB par AE on obtient 3,70. Lorsque l'on divise l'aire de ABCD par l'aire de AEFD on obtient 3,70. Les deux rectangles ont le même côté en commun. L'aire de chaque rectangle varie selon la longueur de l'autre côté. $\frac{AE}{AB} = \frac{\text{aire (AEFD)}}{\text{aire (ABCD)}}$

La résolution de l'exercice 2 reste encore numérique et ne constitue donc pas une difficulté pour les élèves. La stratégie utilisée consiste à faire le changement d'unités, en passant de centimètre à pixels par la multiplication de chaque côté des rectangles ABCD et AEFD par 30. Quelques binômes ont généralisé un peu plus ce changement d'unités en écrivant que le nombre de pixels dans ABCD était l'aire de ABCD multiplié par 900.

Nous constatons ainsi qu'aucun des binômes a fait une généralisation des relations de proportionnalité qu'ils ont trouvées comme nous l'avons indiqué dans l'analyse a priori. L'utilisation des calculs numériques, qui était prévue comme un contrôle pragmatique de la relation que les élèves pouvaient trouver a été, en effet, la seule stratégie développée. La généralisation vers la proportion entre les longueurs, les aires et le nombre de pixels pour chacun des rectangles ABCD et AEFD sont dus à l'acceptation spontanée de la preuve pragmatique : ils partent d'un seul exemple numérique vers la généralisation de la propriété qu'ils veulent montrer.

§2.2. Activité B_2 : urne à pixels

§2.2.1. Les questions auxquelles nous voulons répondre

L'analyse a priori de cette activité a conduit aux questions suivantes :

- Les élèves acceptent-ils de représenter l'expérience aléatoire « choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD » comme une expérience équivalente à l'expérience du pot de perles, introduite comme référence par l'activité A_2 ?

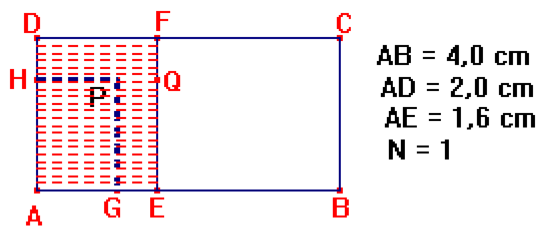
- Les élèves mobilisent-ils spontanément les critères de validité pour reconnaître deux expériences équivalentes ?
- Les élèves acceptent-ils l'utilisation de la méthode expérimentale (analyse des fréquences) afin d'aboutir à la composition d'une urne de Bernoulli qui représente l'expérience aléatoire réalisée dans l'environnement informatique ?

§2.2.2. Le déroulement effectif de l'activité

Premier Groupe : Classe de Troisième

Du fait que les élèves de ce groupe ont eu des difficultés avec la manipulation de la calculatrice TI-92 pour la mise en œuvre des activités proposées, leurs productions écrites ainsi que leurs dialogues ne constituent pas un corpus analysable pour cette activité. Nous présentons la fiche contenant les trois tâches qui ont été proposées.

Fiche 2.



Nous voulons choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD. Dans ce but, nous pouvons associer à ce pixel un point P(x ; y), centre du pixel. Pour obtenir ces coordonnées, nous utilisons la fonction RAND dans la calculatrice. Pour l'expérience en cours, nous considérons comme un "succès" le fait que le point obtenu soit dans le rectangle AEFD. Ce fait sera indiqué, dans la figure, par l'existence du point Q à l'intersection des segments [HP] et [EF] à chaque fois que le point P soit dans AEFD.

Tâche 1 : Décrivez cette expérience aléatoire en précisant les commandes Cabri que vous avez utilisé.

Tâche 2 : Nous voulons réaliser quelques répétitions de l'expérience aléatoire « placer un point P au hasard dans le rectangle ABCD ». Dans ce but, nous utiliserons une animation sur le nombre N, qui est un compteur qui donne le total de points P obtenus.

a) Ouvrez la figure « urne 1 » dans la TI-92.
b) Associez un tableur à la mesure EQ.
c) Animez le compteur N jusqu'à obtenir N = 50.
d) Notez dans le tableau ci-dessous le nombre de succès indiqué sur le tableur.
e) Répétez l'animation 10 fois.

Tâche 3 : l'expérience aléatoire de choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD, est-elle équivalente au tirage au hasard d'une perle dans un pot qui contient des perles blanches et des perles noires ? Quelle urne de Bernoulli proposez-vous pour la représenter ? Justifiez votre réponse.

L'énoncé de la Tâche 2 est complété par le tableau 14 que nous avons présenté dans l'analyse a priori :

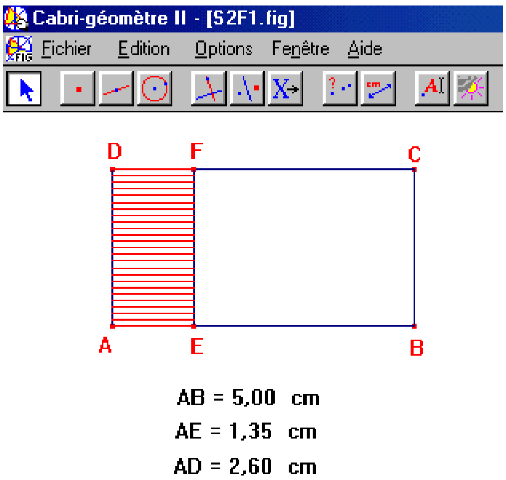
	Nb total de points obtenus	Nb succès	Nb cumulé de points (T)	Nb cumulé de succès (S)	Rapport S/T
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Nous chercherons à répondre aux questions posées au début de cette analyse a posteriori par l'étude du corpus obtenu lors du déroulement de la situation suivante, «Franc-Carreau ». Du fait que cette dernière situation didactique mobilise toutes les notions et tous les savoirs-faire introduits par les situations A et B, ce corpus sera suffisant pour que nous puissions repérer les indices nécessaires pour répondre à ces questions.

Deuxième Groupe : Classe de Seconde

Selon l'organisation proposée aux élèves de ce groupe, cette activité est constituée de 4 exercices, qui sont présentés comme une suite des exercices de l'activité B_1.

Le premier exercice est proposé à la suite de ceux de B_1 dans la même fiche (Fiche 1), comme suite de l'introduction des pixels et de l'équivalence entre le rapport de longueurs, le rapport d'aires et celui du nombre de pixels pour les rectangles AEFD et ABCD. Cet exercice est ainsi en rapport avec la **figure S2F1** que les élèves ont déjà à l'écran.



Exercice 4 – Fiche 1.
Soit l'Expérience Aléatoire « *choisir un pixel P au hasard dans le rectangle ABCD* ». On dira que le résultat est un succès si P tombe dans le rectangle AEFD.

L'outil **Pix** est une macro-construction qui réalise cette expérience aléatoire.
Pour l'utiliser,
- Sélectionner l'outil **Pix** dans la barre d'outils (Cliquer dessus et l'icône s'allume) ;
- Sélectionner ensuite deux côtés consécutifs du rectangle ABCD, par exemple [AB] et [AD].

L'outil **Pix** fait apparaître un pixel tiré au hasard dans le rectangle.
Faites une dizaine d'essais pour vous familiariser avec l'outil **Pix**.

Question : Est-il possible de représenter cette Expérience Aléatoire par une Urne de Bernoulli ? Justifiez votre réponse.

L'énoncé provoque un blocage pour quelques binômes dans la classe car ils ne se rappellent pas ce qu'est une Urne de Bernoulli. L'enseignant essaye de les faire avancer dans la résolution en intervenant dans les binômes pour les mettre en situation de rappel : « *c'est exactement pareil que dans l'autre jour, quand on avait un sac avec des perles* ». Remarquons qu'il n'a pas fourni la définition d'une urne de Bernoulli, mais il a renvoyé au signe (73) attaché à ce concept : le pot de perles.

Du fait que la plupart des binômes sont dans le même type de blocage, l'enseignant intervient de façon collective, en mettant en place effectivement la situation de rappel qu'il venait d'introduire chez deux binômes individuellement.

> Prof : alors, l'urne de Bernoulli. Est-ce que vous rappelez ce que c'est ?
> Élèves : (…)
> Prof : (…) corresponde à une expérience équivalente à celle du comptage des voitures à la sortie du parking. C'est une expérience qu'on peut répéter et, en fait, qu'est-ce qu'il y a dans l'urne de Bernoulli ? Il y a deux couleurs dans une certaine proportion de couleurs dans l'urne et on tire au hasard. Puis, on remet. On tire au hasard, on remet. On fait un certain nombre de tirages. (…) Ce qu'on a fait la dernière fois c'est qu'on a tiré un certain nombre de fois au hasard et on a déduit en fait la proportion de boules … Euh … de perles d'une couleur dans l'urne de Bernoulli.

Ensuite, l'enseignant reformule l'énoncé de cet exercice en demandant si l'expérience avec les pixels ressemblait à un tirage de perles.

Remarquons que les interventions de l'enseignant constituent toujours un renvoi vers le signe et non vers le concept d'urne de Bernoulli lui-même. L'enseignant n'a jamais donné une définition formelle, mais il a fait plutôt un rappel sur la démarche de reconnaissance et de mise en œuvre d'une expérience aléatoire, pour ensuite évoquer la notion d'expériences équivalentes.

---

(73) cf. le triangle épistémologique présenté au Chapitre IV.

La demande de l'enseignant de comparer le choix au hasard d'un pixel dans le rectangle avec le choix au hasard d'une perle dans le pot a provoqué un deuxième blocage : pour les élèves, il ne s'agit pas du même type de hasard. Le fait que dans l'expérience avec les perles, ce sont eux qui ont choisi au hasard la perle et que c'est l'ordinateur qui a fait le choix dans l'expérience avec les pixels, change pour les élèves la caractéristique du hasard en jeu. Pour eux, cela rend les expériences non comparables. Cela confirme l'importance du rôle de la dépersonnalisation, identifié lors de l'analyse a priori de l'activité A_1. L'impact de la dépersonnalisation prévu lors de l'analyse a posteriori de cette activité n'a pas atteint l'effet espéré car les élèves de ce groupe n'ont pas réalisé effectivement les expériences alors proposées : la sortie du parking et sortie du collège, ils ne les ont vécus que par la pensée.

L'enseignant intervient à nouveau pour leur expliquer que « *le hasard est le même, peu importe celui qui manipule : la personne qui tire les perles ou l'ordinateur qui "tire" les pixels* ».

Le tableau ci-dessous montre les réponses données pour cet exercice.

Tableau 19

Binôme	Réponse
Jérémy/Etienne	Oui, parce que les points sont mis au hasard.
Nathalie/Anna	Les points sont placés au hasard dans les rectangles. Puisqu'il y a 2 parties une rouge et une blanche.
Thomas/Isabelle	Oui, avec des billes bleues et rouges.
Cyrielle/Claire/Marylène	Non, car l'ordinateur décide à notre place de mettre les pixels où il veut. Oui, car les 2 parties (1 partie rouge, l'autre blanche) représentent les billes de 2 couleurs $\neq$.
Myriam/Camille	Oui, parce que les points sont mis au hasard. De plus, les 2 parties blanches et rouges ont une aire mise au hasard (en fonction d'où est placé le point E).
Olivier/Djamel	Oui, car cela dépend de l'aire AEFD, plus elle est petite, plus les pixels seront nombreux dans l'aire du rectangle EBCF.
Hana/Anaï s	Oui. Le rapport des aires correspond au sac de billes : les boules rouges sont le rectangle AEFD.
Gregory/Cyril	Oui, car le % de réussite dépend de l'aire $\frac{AEFD}{ABCD}$
Mélissande/Gaëlle	Oui. Pixels AEFD rouges (billes) et les billes bleues représentent les autres. Ça dépend de [AE]. Plus il est grand, plus on a de chances de tomber sur une bille rouge. Rapport des billes rouges sur le total. Dans le rectangle AEFD : | | | | | 5 succès (5P dans AEFD) Dans le rectangle AEFD : | | | | |
Bénédicte/Rose	Oui, c'est à peu près la même expérience, car c'est une expérience que l'on peut renouveler, et il y a aussi une proportion de chance de tomber dans AEFD comme de tirer une bille rouge. C'est le hasard.
Julien/Kévin	Oui, le nombre de succès est proportionnel à l'aire de $\frac{ADFE}{ABCD}$ soit $\frac{AE}{AB}$
Mélanie/Christelle	Oui, on peut représenter cette expérience aléatoire par une Urne de Bernoulli parce que rapports égaux.
Yaël/Caroline	Problème d'ordinateur.

Stéphanie/Emilie	L'urne de Bernoulli. Le nombre de succès est proportionnel à l'aire du rectangle AEFD.

Pour bien comprendre la nature des justifications données par les binômes dans cet exercice, revenons aux conditions d'identification de deux expériences équivalentes, ainsi que nous l'avons introduit lors de la mise en place de la situation A.

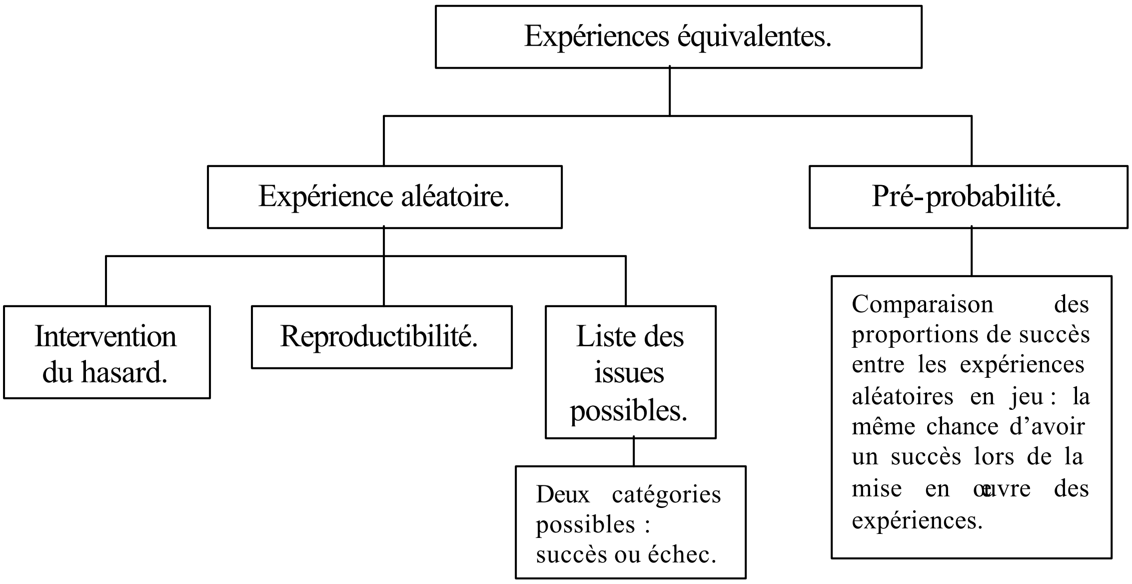


Schéma 19

Les débats intragroupes nous montrent que les élèves ont bien dégagé l'équivalence entre le tirage dans le pot de perles et le choix au hasard d'un pixel dans le rectangle ABCD. Cependant, leurs réponses écrites ne montrent pas clairement les raisonnements qu'ils ont développés pour aboutir à cette équivalence. Les enregistrements et les notes des observateurs en classe nous conduisent à la conjecture que les élèves ont déjà appréhendé la notion d'expériences aléatoires équivalentes, mais leurs productions écrites ne nous permettent pas de valider complètement cette conjecture.

Nous dégageons des échanges verbaux au sein des groups que les élèves ont justifié la possibilité de représenter l'expérience proposée par une urne de Bernoulli en faisant la comparaison avec l'expérience du pot de perles. Ils ont assimilé les deux expériences aléatoires comme des expériences équivalentes, même s'ils ne rendent pas publics les éléments mobilisés. D'après leurs productions écrites, cette identification n'a pas été fondée sur la mise en œuvre de la notion d'expérience aléatoire [74] même si l'enseignant venait de les énumérer lors de sa dernière intervention.

Parmi les quatorze binômes qui ont résolu cet exercice, seulement celui de Bénédicte et Rose les évoquent de façon explicite et simultanée, y compris la même pré-probabilité pour

[74] Mise en œuvre par la désignation explicite des trois caractéristiques : hasard, reproductibilité, liste d'issues.

les deux expériences en jeu. Deux binômes, Nathalie/Anna et Myriam/Camille ont évoqué à la fois l'intervention du hasard et le classement des résultats possibles selon deux catégories (rouge et autre). Les autres élèves ont évoqué soit une seule des caractéristiques soit une caractéristique sans lien avec une expérience aléatoire. Cinq binômes n'ont justifié l'équivalence entre les deux expériences que par l'analyse de la pré-probabilité attachée à chacune d'elles.

Le tableau ci-dessous illustre la distribution des caractéristiques identifiées par chacun des binômes.

Tableau 20

Binôme	**Expériences équivalentes**				**Autres**
	expérience aléatoire			proportion	(caractéristiques non pertinentes)
	Reproductible	Intervention du hasard	2 résultats possibles	(pré-probabilité)	
Jérémy/Etienne		X			
Nathalie/Anna		X	X		
Thomas/Isabelle			X		
Cyrielle/Claire/Marylène			X		
Myriam/Camille		X	X		
Olivier/Djamel					X
Hana/Anaï s				X	
Gregory/Cyril					X
Mélissande/Gaëlle			X	X	
Bénédicte/Rose	X	X	implicite	X	
Julien/Kévin					X
Mélanie/Christelle				X	
Yaël/Caroline					
Stéphanie/Emilie				X	

Nous pouvons donc conclure que la conceptualisation de la notion d'expérience aléatoire, notion déclanchée par la mise en place de la situation A et à réinvestir lors du déroulement de la situation B, n'est pas encore achevée. Les élèves ont utilisé l'expression « expérience aléatoire » pour étiqueter les expériences qu'ils sont en train de réaliser plutôt par un effet du contrat didactique en cours. En conséquence, l'identification de deux expériences équivalentes n'est pas encore un savoir-faire opératoire chez ces élèves car il leur manque les connaissances qui constituent les critères de validité pour une telle opération :

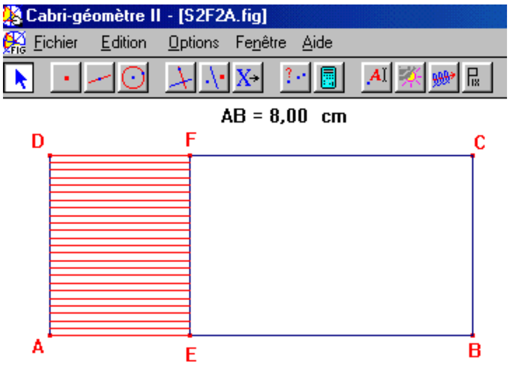
a) Ce sont des expériences aléatoires ;
b) Elles sont représentées par la même urne de Bernoulli (les résultats possibles sont organisés selon la même proportion).

Remarquons leur ambiguï té dans l'usage du mot « pixel » qui, selon les cas, désigne le carré unité ou son côté pris pour unité de longueur. Cela est perceptible dans les dialogues entre les élèves. Nous pouvons dégager l'appréhension qu'ils ont du Cabri-dessin qu'ils observent à l'écran : l'énoncé leur demande combien de pixels il y a sur une longueur et combien de pixels il y a dans une aire. Nous remarquons que pour certains élèves, le Cabri-dessin « segment » qu'ils voient à l'écran a les mêmes propriétés que la figure géométrique « segment » qu'il représente. Ils ne voient pas que l'image électronique est formée des pixels qui la composent.

L'enseignant distribue alors la Fiche 2 contenant les trois derniers exercices de l'activité B_2. Nous soulignons que les exercices qui composent cette fiche ont une formulation modifiée par rapport à celle présentée dans l'analyse a priori. Nous justifions ces changements par la chronologie de la mise en place de l'ingénierie dans les deux groupes, classe de Troisième et classe de Seconde. Ainsi, les énoncés qui n'ont pas provoqué l'évolution des élèves de Troisième selon nos attentes, ont été adaptés pour cette nouvelle mise en place.

Les exercices qui constituent cette fiche sont les suivants :

Ouvrir la figure S2F2A dans Cabri.



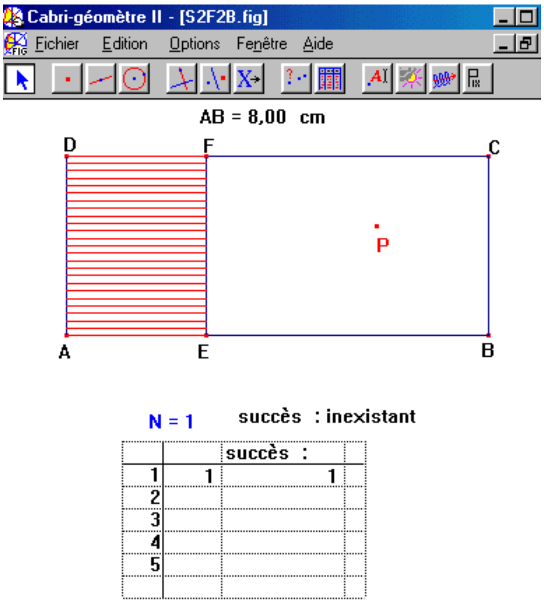
Exercice 5 : Soit l'Expérience Aléatoire « choisir un pixel P au hasard dans le rectangle ABCD ». On dira que le résultat est un succès si P tombe dans le rectangle AEFD. Le rectangle que vous voyez sur l'écran est une « Urne à Pixels », qui représente cette Expérience Aléatoire, **dans laquelle la distance AE est inconnue**.

a) Faites 10 répétitions de cette Expérience Aléatoire en utilisant la macro-construction « Pix » et notez le nombre de succès que vous avez obtenu.

b) Question : Que pouvez-vous dire à propos de la distance AE ? Justifiez votre réponse.

<u>Exercice 6.</u>

Ouvrir la figure S2F2B dans Cabri.



Le but est de répéter un grand nombre de fois l'Expérience Aléatoire «choisir un pixel P au hasard dans le rectangle ABCD », pour laquelle on dira que le résultat est un succès si P tombe dans le rectangle AEFD.

Une animation du compteur N permet le fonctionnement automatique de l'Urne à Pixels un grand nombre de fois.

La fiche présente alors les consignes pour réaliser l'animation du compteur, l'enregistrement des résultats sur une Cabri-table et finalement, le transfert de ses résultats sur une feuille Excel.

La figure 20 ci-dessous montre l'écran de l'élève avec Cabri et Excel. Notons que le nombre d'essais et le nombre de succès affiché dans cette feuille Excel est N-1. Cela est dû au fait qu'on élimine les valeurs affichées dans la première ligne de la Cabri-table car ils ne sont

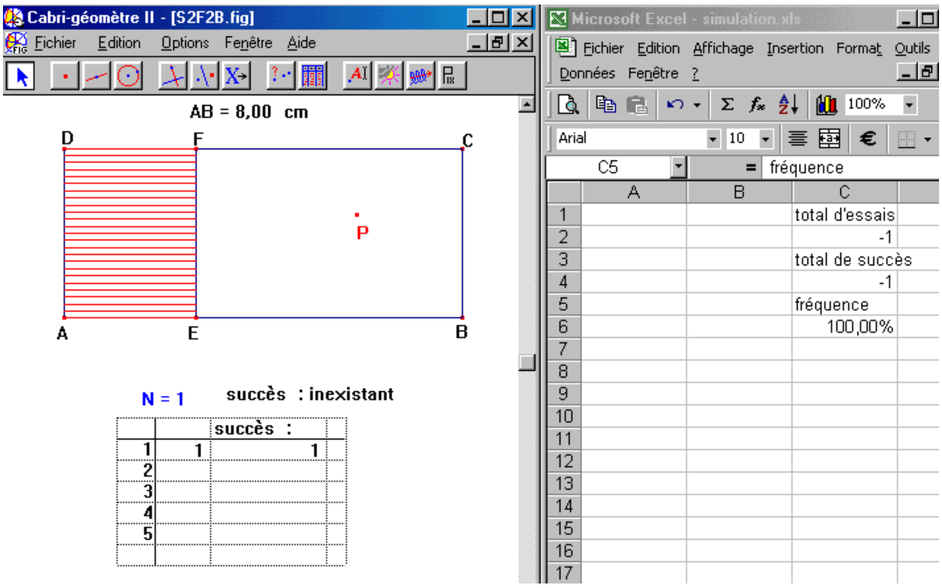


Figure 20

pas le résultat d'une expérience aléatoire, comme nous l'avons déjà indiqué au paragraphe §3 du Chapitre III.

<u>Exercice 7.</u>

a) Après cette expérimentation, pouvez-vous préciser les dimensions des segments [AB] et [AE] ? Justifiez votre réponse. b) En admettant que les boules rouges représentent le succès d'une expérience aléatoire, quelle Urne de Bernoulli proposeriez-vous pour représenter l'expérience « choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD » ? Justifiez votre réponse.

Remarquons que l'énoncé de ces exercices constitue une suite pour aboutir à la mise en place de la méthode expérimentale pour la détermination de la proportion d'une urne de Bernoulli. Ainsi, nous avons essayé d'introduire à la fois la construction du modèle et la mise en œuvre de ce modèle. Le tableau 21 ci-dessous montre la différence de formulation par rapport à celle qui a été proposée dans l'analyse a priori, par rapport à l'expérience aléatoire « choisir au hasard un pixel P dans le rectangle ABCD », le succès étant « le pixel tombe dans AEFD ».

Tableau 21

	Activité prévue.	**Activité réalisée.**
Données	Le Cabri-dessin avec les mesures AB et AE.	Le Cabri-dessin et la mesure AB.
Tâche	Donner la composition de l'urne de Bernoulli.	Donner la composition de l'urne de Bernoulli et la longueur du segment AE.
Méthode disponible	Rapport des aires ou estimation par les fréquences.	Estimation par les fréquences.
Sens de la résolution	Expérience concrète → Urne de Bernoulli	Expérience concrète ⇄ Urne de Bernoulli

En effet, l'énoncé proposé dans l'analyse a priori a été effectivement proposé dans l'exercice 4. Les exercices 5, 6 et 7 consistent plutôt en un complément de l'activité B_2, afin de voir si les élèves sont capables de réinvestir spontanément la notion d'urne de Bernoulli pour résoudre un problème dans le domaine de la réalité.

Dans un premier temps, l'impossibilité d'utiliser directement le rapport d'aires pour résoudre le problème de donner une composition pour l'urne de Bernoulli a troublé les élèves, en provoquant un blocage. Une difficulté supplémentaire était la demande de donner la longueur du segment [AE], sans indication dans l'énoncé d'utiliser l'urne de Bernoulli qu'ils venaient de proposer. L'enseignant est intervenu pour suggérer aux élèves de continuer la lecture de la fiche entière. Nous remarquons qu'il a essayé de faire remarquer aux élèves que les exercices 5 et 6 étaient, en effet, une préparation pour l'exercice 7.

L'enseignant commence une première mise en commun 10 minutes après la distribution de la fiche, après avoir remarqué les difficultés des élèves pour interpréter l'énoncé et la demande de déterminer la longueur du segment [AE].

> Prof : Pour ceux qui ne savent pas répondre à la question 5. Vous avez fait un tirage, vous avez … mettons … un certain nombre de succès. Et la question qu'on vous demande c'est « que pouvons-nous dire de la distance AE ? Camille ?
>
> Camille : bon, on a mis que … euh… le nombre de succès dépend de la distance AE.
>
> Prof : Dépend de la distance AE. Par quoi tu expliques ça ?
>
> Camille : Parce que plus la longueur AE est élevée, plus l'aire de la partie rouge sera élevée alors on aura plus de chance d'avoir le point en rouge.

Le choix de l'enseignant de demander la réponse à Camille n'était pas dû au hasard. Lorsqu'il est passé dans les binômes pour accompagner leur travail, il avait déjà vu leurs réponses. Il savait donc que celle donnée par le binôme de Camille pourrait conduire les élèves en difficulté vers la bonne stratégie.

L'enseignant fait alors une remarque pour mettre en évidence l'insuffisance des 10 essais de l'expérience aléatoire pour répondre à la question sur la longueur AE. Nous dégageons de cette remarque son intention de faire avancer les élèves vers la réalisation d'un grand nombre d'essais par l'utilisation du compteur, ce qui est demandé par l'exercice 7.

Ainsi, après l'intervention de l'enseignant, les élèves arrivent à répondre à la question posée par l'exercice 5.

Tableau 22

Binôme	Réponse
Jérémy/Etienne	La distance AE détermine les chances de proportionnalité d'avoir un succès.
Nathalie/Anna	Plus la distance AE est grande plus les chances d'avoir des succès augmente.
Thomas/Isabelle	La distance AE est proportionnelle au nombre de pixels.
Cyrielle/Claire/Marylène	La distance AE est proportionnelle au nombre de succès. Si AE est plus grand alors on aurait eu plus de succès et inversement.
Myriam/Camille	La distance AE permet d'obtenir les aires des 2 rectangles (les deux parties rouge et blanche) donc plus AE est grand plus de succès devrait être élevés. Le nombre de succès dépend de la distance AE.
Olivier/Djamel	Plus le rectangle AEFD est grand, plus il y a de chance qu'il y ait de succès.
Hana/Anaï s	Plus la longueur AE est petite, moins on a de chances d'avoir des succès. Les chances d'avoir un succès sont proportionnelles à la longueur AE.
Gregory/Cyril	Le nombre de succès dépend de la longueur de AE sur celle de AB.
Mélissande/Gaëlle	Si AE grandit et mais pas AB, alors le nombre de chances d'avoir des succès augmente.
Bénédicte/Rose	AE détermine la proportion de succès car quand on augmente AE, on augmente l'aire d'AEFD et le nombre de succès. Inversement si on diminue AE.
Julien/Kévin	La longueur du segment $\frac{\text{AE}}{\text{AB}}$ est proportionnelle au $\frac{\text{nombre de succès}}{\text{nombre total d'essais}}$ donc il y a $\frac{1\text{ succès}}{2\text{ essais}}$, AE est la moitié de AB. (Lors de la question (a) ce binôme a obtenu 5 succès sur 10 essais).
Mélanie/Christelle	Les nombres du succès peuvent varier par rapport à [AE].
Yaël/Caroline	NR
Stéphanie/Emilie	Le nombre de succès dépend de la longueur AE. Le nombre de succès est proportionnel à la longueur AE.

Nous remarquons que les proportions identifiées lors de l'activité B_1 sont mobilisées par les élèves, même si cette mobilisation a été une conséquence de l'intervention de l'enseignant. Les élèves associent alors les chances d'obtenir un succès (la pré-probabilité) à la longueur AE et par conséquent, à l'aire du rectangle AEFD.

L'exercice 6 ne présente pas une tâche à résoudre, mais seulement la mise en œuvre de l'animation du compteur afin d'obtenir des éléments permettant la mise en place d'une stratégie pour l'exercice 7. Nous passerons alors directement à cette dernière tâche de l'activité B_2.

Nous avons pu remarquer que la demande de déterminer la longueur AE, ce qui constitue une inversion dans les sens de résolution utilisée jusqu'à l'exercice 4, reste toujours une source de difficulté pour les élèves. L'enseignant est intervenu de façon assez précise pour les aider à sortir de ce blocage et le tableau ci-dessus, contenant les réponses des élèves à la question 5 montre que ces réponses sont probablement dues à un effet de contrat ou même à un effet Topaze : l'enseignant avait annoncé par ces interventions ce qu'il attendait comme réponse. Nous pouvons dégager les mêmes types de réponses, c'est-à-dire des réponses dues à un effet de l'intervention de l'enseignant dans les productions des élèves pour l'exercice 7, items (a) et (b). Citons les deux interventions de l'enseignant, une pour le groupe du premier cours et l'autre pour le deuxième cours.

Lors du premier cours, l'enseignant intervient chez un binôme, mais de façon à ce que les autres élèves de la classe puissent l'entendre :

> Prof : Tout à l'heure on a dit que la distance AE dépendait du nombre de pixels, c'est ça ?
> Élèves : (exclamations d'accord avec l'enseignant).
> Prof : Maintenant on a le nombre de pixels. On ne peut pas en déduire la distance AE ?

Lors du deuxième cours, l'intervention de l'enseignant a eu lieu pendant l'exercice 5 :

> Prof : (…) Est-ce que vous êtes d'accord : il y a des gens qui n'ont pas l'air de dire, mais on ne va pas passer du temps la-dessus. C'est que si vous faites 10 essais avec Pix, vous obtenez 10 tirages. Est-ce que du nombre de pixels que nous avez obtenus, vous pouvez dire quelque chose concernant AE ?
> Cyril : Je suppose qu'il faut dire non …
> Prof : Tu cherches pas à deviner ce qu'il faut que tu dises pour que je sois content … C'est pas ça le jeu … Le jeu c'est que tu me dises ce que tu penses. Tu penses que non ou tu penses que oui ?
> Cyril : Ben … alors, il y a des chances que la relation AE/AB soit appliquée également sur 10.
> Prof : Bon, alors tu penses qu'il y a une relation. Simplement tu a envie de dire oui ou non … À cause de quoi tu as des réserves ?
> Cyril : j'sais pas (…)
> Prof : Non, non. Il n'y a pas de question piège là. J'essaie de te faire réfléchir à des situations où le hasard intervient. Qu'est-ce que tu as à dire, Cristelle ? Lui, il a très peur que je le piège …
> Mélanie, la partenaire de Cristelle dans le binôme, prends la parole.
> Mélanie : Nous, on a mis que le nombre de succès peut varier par rapport à AE.
> Prof : Oui.
> Mélanie : Ben … si AE occupe plus de place … euh … il y a plus de …
> Prof : Mélanie dit que le nombre de succès dépend de la longueur AE. On est bien d'accord ?
> Classe : Oui.
> Prof : On va aller un peu plus loin. Hanna, tu veux dire …
> Hanna : Puisque la longueur AE elle est proportionnelle à l'aire du rectangle AEFD, plus …
> Prof : Plus le rectangle est grand, plus on a des chances de tomber dedans. D'accord ? Un petit peu plus loin là, c'est pareil (il indique les exercices de la fiche des élèves). Alors, je vous laisse continuer l'expérience.

Remarquons que l'intervention au sein du deuxième groupe, ayant lieu lors de la résolution de l'exercice 5, a induit plutôt la mobilisation des proportions dégagées par l'activité B_1.

Nous dégageons du discours de l'enseignant au sein du premier groupe l'association explicite entre le nombre d'essais et le nombre de pixels qui remplissent le rectangle ABCD. Autrement dit, l'enseignant assimile pour les élèves l'échantillon constitué par les pixels qui ont été « choisis » par l'ordinateur à la population constituée par la totalité des pixels qui tapissent le rectangle. Cette assimilation a induit les réponses des élèves : la totalité des binômes a composé leur urne par un total de 998 boules, le nombre total d'essais indiqué par la feuille Excel qu'ils avaient à l'écran.

Lors du deuxième cours, cette assimilation entre population et échantillon est aussi présente, mais moins explicitement. Les interventions qui l'ont conduit ont été faites plutôt au sein de quelques binômes. La communication entre les divers binômes à joué comme facteur de diffusion de cette stratégie pour composer l'urne de Bernoulli. Dans ce deuxième groupe de la classe de Seconde, nous avons eu aussi la totalité des élèves composant une urne avec 998 boules.

Dans les deux groupes, les élèves ont pris le nombre de succès indiqué par Excel comme la quantité de boules rouges à mettre dans l'urne de Bernoulli demandée par l'énoncé.

§3. Conclusion de l'analyse a posteriori de la situation B

Nous avons pu constater que les productions écrites ou verbales des élèves lors de la mise en place de cette deuxième situation didactique de notre ingénierie ne nous permettent pas de dégager des éléments significatifs pour répondre aux questions que nous nous posons. La difficulté avec le matériel informatique due à l'inhabitude des élèves est intervenue de façon très importante dans le déroulement de la séance.

Ainsi, nous avons pu constater que les élèves de la classe de Troisième sont restés bloqués à cause de cette manipulation. Pour la classe de Seconde, cette inhabitude a augmenté le degré de difficulté pour la compréhension des tâches et complexifie le contrat didactique. Nous pouvons alors constater la nécessité d'une séance supplémentaire, hors du cadre de l'ingénierie, dont le but serait seulement la familiarisation des élèves avec le dispositif informatique à utiliser.

Du fait que les trois situations de notre ingénierie didactique s'enchaînent, ainsi que nous l'avons présenté au paragraphe 2 du Chapitre III, nous dégagerons de l'analyse de la situation suivante, « Franc-Carreau », les réponses aux questions posées.

CHAPITRE VI : ANALYSE DE LA TROISIÈME SITUATION DIDACTIQUE – « FRANC-CARREAU »

Introduction

Ce chapitre contient l'analyse a priori, le déroulement et l'analyse a posteriori de la dernière situation mise en place dans le cadre de notre ingénierie didactique. Cette situation, « Franc-Carreau », est constituée par deux activités : *le jeu de franc-carreau* et *le jeu du triangle*, comme nous l'avons présenté au paragraphe 2 du Chapitre III.

Au cours de cette ingénierie, les élèves ont eu un premier contact avec les situations aléatoires présentées dans un contexte de la vie courante par la situation A, «Expérience de Bernoulli », qui aboutissait à leur représentation par un modèle d'urne de Bernoulli. Les élèves devaient alors partir d'une expérimentation concrète, réalisée par eux-mêmes, pour aboutir à une représentation de cette expérience dans le domaine pseudo-concret (voir Chapitre IV). Dans la suite, le même processus de modélisation (réalisation de l'expérimentation, observation, représentation par un modèle d'urne de Bernoulli) a été présenté dans environnement informatique. Les expériences étaient alors proposées dans un cadre géométrique (deux rectangles proposés à l'écran, ABCD et AEFD) dans lequel la probabilité était assimilée au rapport entre les nombres de pixels qui remplissaient chacun de ces rectangles (voir Chapitre V).

Cette dernière situation didactique est proposée encore en environnement informatique et dans le cadre géométrique (probabilité assimilée au rapport entre les nombres de pixels). Les élèves seront invités à retravailler ces notions et savoirs-faire introduits par les deux situations précédentes afin de résoudre les tâches proposées. Les éléments dégagés des analyses a priori et a posteriori de cette situation sont cruciaux pour notre problématique pour nous permettre de nous positionner par rapport aux questions et aux hypothèses de recherche qui nous ont guidés.

§1. Analyse a priori des activités qui composent la situation « Franc-Carreau »

Objectifs principaux

- Conduire les élèves à l'utilisation de la démarche de modélisation d'une situation de la réalité par le modèle d'urne de Bernoulli, démarche introduite par les deux situations précédentes, A et B ;
- Élargir la notion d'urne à pixels, chez les élèves, par un changement de la figure présentée à l'interface du dispositif informatique ;
- Mettre en fonctionnement le modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli et sa réification par l'urne à pixels pour résoudre un problème d'estimation d'une probabilité.

Les deux activités qui composent cette situation didactique, «*le jeu du Franc-Carreau* » et « *le jeu du triangle* », s'enchaînent de façon à placer l'élève face au besoin d'adapter des connaissances déjà introduites par les deux situations didactiques précédentes. Cette adaptation vise aboutir à une stratégie optimale afin de résoudre le problème proposé. Ainsi, pour modéliser les deux jeux présentés à l'écran, l'élève doit mobiliser la notion d'expérience aléatoire de Bernoulli. Ensuite, il doit généraliser la notion d'urne à pixels et finalement, adapter sa méthode pour contrôler un résultat, en passant d'une validation pragmatique des critères de validité qui ont été introduits par les activités précédentes.

Nous souhaitons particulièrement que les élèves dégagent la notion de stabilisation des fréquences lors d'un grand nombre de répétitions d'une expérience aléatoire comme un critère de validité. Cette notion a été introduite par ostension dans l'activité B_2 lorsque la tâche demandait la composition approximative de l'urne de Bernoulli à partir des fréquences expérimentales. La méthode ou la technique introduite pour résoudre cette tâche était de **réaliser un très grand nombre d'essais d'une expérience aléatoire. La technologie, au sens de Chevallard (1996 et 1999), est restée implicite pour les élèves car introduite par ostension et de façon informelle. Cette technique était que la fréquence de succès fournit une valeur approximative de la proportion de boules blanches dans l'urne de Bernoulli qui modélise cette expérience. Cette fréquence serait interprétée alors comme une sorte de mesure approchée.**

Ainsi, même si par notre hypothèse de travail HT_2, nous admettons que certaines connaissances [75] sont disponibles chez l'élève, les activités qui composent les situations A et

---

[75] La proportionnalité et les notions statistiques élémentaires, comme les notions de population, effectif et

B préparent les conditions permettant de mettre en œuvre cette activité au moyen :

- ✓ Des activités de rappel, contextualisées par la démarche de modélisation que nous voulons introduire, sur la proportionnalité et les notions statistiques élémentaires ;
- ✓ De l'appel aux notions de *reproductibilité*, d'*expérience aléatoire*, de modèle d'*urne de Bernoulli*, ainsi que les notions attachées à celles-ci ;
- ✓ De l'introduction d'un savoir-faire spécifique pour la modélisation envisagée. Ce savoir-faire comporte à la fois une méthode a priori (calcul d'un rapport d'aires) et une méthode expérimentale (analyse des fréquences) pour l'évaluation des "chances" d'obtenir un succès lors d'une expérience de Bernoulli. Le lien entre les résultats obtenus et la pré-probabilité est fait par la discrétisation des aires en jeu.

Nous faisons alors l'hypothèse que les activités qui constituent cette situation didactique C, dans l'enchaînement que nous proposons, nous permettront d'étudier la mise en fonctionnement des notions acquises précédemment. Cette situation est ainsi une situation clé pour la validation ou la réfutation de notre hypothèse HRP, présentée au §1 du Chapitre III : **« la double démarche d'expérimentation et de modélisation permet aux élèves au niveau du Collège d'acquérir des outils de représentation et d'interprétation des phénomènes aléatoires »**.

§1.1. Activité C_1 : le jeu de Franc-Carreau

§1.1.1. Présentation de l'activité

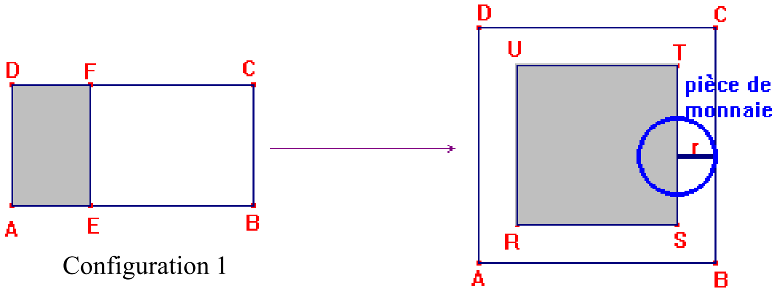
Cette activité sert à :

i) Introduire la distinction entre *simulation informatique* et *représentation à l'écran* d'une expérience aléatoire mettant en évidence le modèle attaché à la simulation envisagée.

ii) Élargir la notion d'*urne à pixels* :

- ✓ en changeant la région qui délimite le succès d'une région explicite (rectangle AEFD) à une région implicite mais accessible par un raisonnement géométrique (carré RSTU). Nous expliciterons ce raisonnement dans l'analyse de la tâche.

fréquence d'une propriété ou d'un caractère dans une population.



Configuration 1

Configuration 2

Figure 21

L'élargissement de la notion d'urne à pixels demande à l'élève une appréhension opératoire, par une modification figurale de type méréologique (Duval, 1994) : l'élève doit décomposer mentalement les deux carrés de la Configuration 2 ci-dessus, pour obtenir la configuration des rectangles (Configuration 1), selon laquelle cette notion a été introduite. Comme dans un puzzle, il doit reconstruire mentalement la configuration qu'il connaît.

L'activité C_1 commence par une situation de rappel dont le but est d'évoquer la démarche de modélisation, ainsi que l'utilisation d'une expérience de référence, qui ont été introduites par les deux situations précédentes A et B :

1) Réaliser l'expérience concrète « jeu de Franc-Carreau », hors environnement informatique, « *lancer une pièce de monnaie au-dessus d'un carrelage et observer la position finale de cette pièce après immobilisation* ». On décide qu'il y a succès si la pièce tombe entièrement dans un seul carreau (position "franc-carreau") ;
2) Représenter [76] l'expérience précédente en environnement informatique. Cette représentation, faite à l'aide de Cabri-géomètre II qui permet de placer un point au hasard dans une région délimitée à l'écran, est ainsi une autre expérience aléatoire concrète.
3) Réaliser [77] cette deuxième expérience concrète, dans environnement informatique, « *placer au hasard le centre du disque "pièce de monnaie" à l'intérieur du carré ABCD et observer la position finale de ce disque par rapport aux côtés du carré* ». On décide qu'il y a succès si le disque ne coupe pas les côtés du carré ABCD (position "franc-carreau") ;
4) Comparer les deux expériences en termes d'*expérience aléatoire* : peut-on simuler la première expérience (le jeu de Franc-Carreau) par la deuxième (expérience de référence dans un environnement informatique) ?

---

[76] La représentation est faite par l'assimilation entre l'expérience concrète réalisée hors environnement informatique et la configuration géométrique qui est présentée à l'écran du dispositif informatique.
[77] La réalisation effective de l'expérience, par la mise en fonctionnement du dispositif informatique tel qu'il a été conçu.

5) Expliciter l'urne de Bernoulli qui modélise ce jeu de Franc-Carreau.

Remarquons que, même si le but de la démarche de modélisation est de comparer deux expériences aléatoires, nous pouvons attendre que, pour l'élève, cette comparaison ne porte que sur l'apparence géométrique des expériences en jeu. C'est-à-dire que l'élève dégage plutôt la forme des figures en jeu (le carré et le disque), sans tenir compte des proportions qui les distinguent.

Nous allons ainsi reconstituer les trois sommets du triangle épistémologique que nous avons présenté à l'activité A_2 (schémas 15 et 16) pour représenter le concept d'urne de Bernoulli :

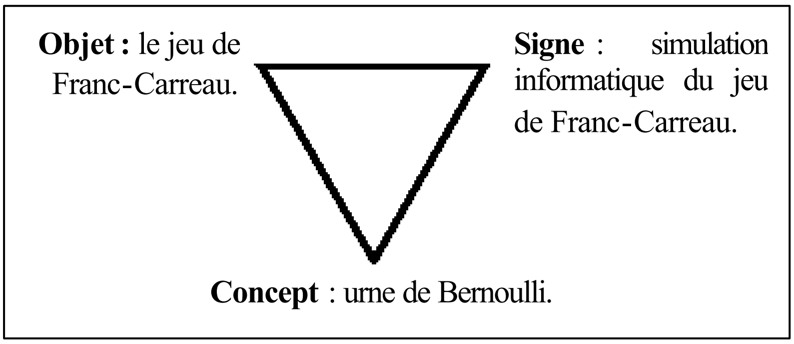


Schéma 20

L'activité C_1 introduit la simulation informatique d'une expérience concrète présentée hors environnement informatique pour l'apprentissage (EIA), permettant ainsi à l'élève d'établir le lien entre les expériences aléatoires proposées par les deux situations précédentes A (hors EIA) et B (dans EIA).

§1.1.2. Analyse de la tâche

L'activité commence par la présentation aux élèves du jeu de Franc-Carreau, présentation faite par l'enseignant et dont l'énoncé est aussi dans la fiche distribuée plus tard à ces élèves.

> Ce jeu a été étudié par la première fois en 1733 par un naturaliste et mathématicien français, Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon. Il consiste à jeter un écu sur un carrelage. Les joueurs parient sur la position finale de l'écu : tombera-t-il entièrement sur un seul carreau (franc-carreau), sur un joint entre deux carreaux, ou encore sur deux, trois ou quatre joints ?

Après avoir illustré le jeu par l'action de jeter une pièce de monnaie sur un carrelage ou sur une feuille de papier quadrillée (Badizé & al., 1996 ; Gandit & Helmstetter, 1998), on présente aux élèves une représentation informatique du jeu dans Cabri. Nous proposons alors la représentation du carrelage par un seul carreau : celui qui contient le centre du disque représentant l'écu après son immobilisation. Dans ce premier Cabri-dessin, l'élève peut modifier les dimensions du disque et du carré RSTU, ainsi que modifier la position du point P, en déplaçant le disque librement à l'écran (voir figure qui accompagne l'énoncé dans l'encadré ci-dessous).

Cette activité a deux versions, selon le choix de méthode de validation qu'on veut induire :

- Une première version fournit les mesures du carré et du rayon du disque. Les élèves peuvent alors développer une résolution du type «rapport d'aires », dont le contrôle se fera par l'analyse des fréquences obtenues expérimentalement par l'animation du compteur N ;
- Une deuxième version, au contraire, ne fournit pas les mesures associées au Cabri-dessin, mais présente le compteur N et une Cabri-table. On enlève même la possibilité d'obtenir ces mesures en les supprimant de la barre d'outils de Cabri. Les élèves peuvent alors développer une résolution du type « analyse des fréquences », dont le contrôle se fera par le rapport d'aires, pour lequel les éléments seront fournis dans un deuxième temps dans l'activité.

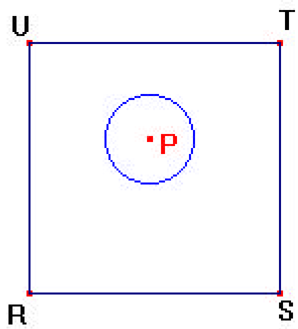
§1.1.2.1. Première version

Présentons d'abord la première version, pour laquelle la tâche proposée est organisée en 3 questions, dont la première est la suivante :

1) À quelle condition le disque est-il placé entièrement à l'intérieur du carré ? Dans ce cas, nous dirons que le cercle est à « franc-carreau ».

RS = 3,0 cm.

Rayon du cercle r = 0,6 cm.



Le problème place l'élève d'emblée dans le cadre géométrique : en considérant les positions-limites pour obtenir franc-carreau, on délimite la région des positions possibles du point P, centre du disque, conformément à la figure ci-contre. Ainsi, la région cherchée est le carré R'S'T'U', dont les côtés mesurent (RS – 2.r) : si le point P est à l'intérieur de ce carré, alors le disque est en position franc-carreau. Nous signalons ici une difficulté conceptuelle introduite par l'activité : le passage du disque à sa caractérisation par son centre.

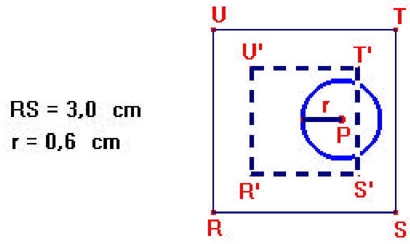


Figure 22

Les élèves doivent alors dégager les éléments intra-figuraux dans le Cabri-dessin présenté à l'écran, permettant la construction d'une conjecture sur les conditions pour que le disque soit entièrement à l'intérieur du carré RSTU. Ce carré doit être perçu à partir de ses côtés, et le disque à partir de composants tels que la circonférence, le rayon et le centre. D'après Laborde (1994b), l'environnement Cabri-géomètre rend compte de la variabilité des constituants de la figure de façon plus efficace que l'environnement papier-crayon. Ainsi, du fait que cette tâche est proposée dans un tel environnement informatique, cela favorise les modifications positionnelles de la figure au sein d'une appréhension opératoire (Duval, 1994).
Ces modifications positionnelles consistent *« soit dans le déplacement de la figure dans le plan soit dans le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle (...) Ces traitements peuvent être effectués aussi bien mentalement que réalisés matériellement. »* (Duval, 1994, p. 126).

Autrement dit, l'usage des possibilités offertes par l'environnement Cabri favorise le traitement et le contrôle perceptif fondés sur la reconnaissance visuelle des phénomènes mis en évidence par le déplacement du centre P du disque, à l'intérieur du carré RSTU. Ce traitement et ce contrôle sont fondés sur des connaissances théoriques car le déplacement préserve les propriétés de la figure (Laborde, 1994b).

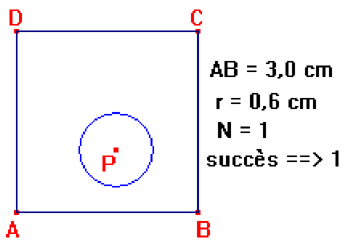
Ainsi, pour obtenir le carré R'S'T'U', la stratégie la moins coûteuse mais non immédiate, surtout pour des élèves peu familiarisés avec l'environnement, est l'activation de l'outil « Trace » de Cabri pour le point «P ». Ce point laisse ainsi sa trace lorsqu'il est déplacé. Les élèves peuvent alors déplacer «P » de façon à repérer visuellement où se trouve P lorsque le disque parcourt le carré RSTU, en restant tangent à ces bords. Ils peuvent ainsi conjecturer l'existence de R'S'T'U' : un carré dont les côtés mesurent 3,0 cm moins deux fois le rayon du disque, soit R'S' = 1,8 cm.

La question posée par l'énoncé doit alors être interprétée comme une demande de délimitation par expérimentation, à l'écran, de la région « succès » dans le carré RSTU, comme l'activité B_2 l'a introduit lors de la situation précédente. La tâche se situe au niveau spatio-graphique : dessins produits par d'électrons sur l'écran de l'ordinateur, représentant des objets et relations géométriques qui sont de nature théorique (Capponi & Laborde, 1995).

Avant d'énoncer la deuxième question de cette tâche, on présente à l'élève la macro-construction « FC » dont les objets initiaux sont deux côtés consécutifs du carré RSTU et le rayon du disque. L'objet final est le point P, placé *au hasard* à l'intérieur de RSTU et le disque. La macro-construction simule donc le jeu de Franc-Carreau, le disque pouvant déborder du carré RSTU.

La deuxième question de l'activité selon cette première version de la situation C est présentée dans l'encadré ci-dessous :

Ce jeu a été proposé pour la première fois en 1733 par un naturaliste et mathématicien français, Georges-Louis Leclerc de Buffon, qui a été plus connu comme naturaliste. Il consiste à jeter un écu au-dessus d'un carrelage. Les joueurs parient sur la position finale : tombera-t-elle, cette pièce de monnaie, entièrement sur un seul carreau (franc-carreau), sur un joint entre deux carreaux, ou encore sur deux, trois ou quatre joints ? Considérons comme succès de cette expérience aléatoire «la pièce tombe à franc-carreau». On construit le cercle de centre P et rayon 0,6 cm en utilisant la macro-construction « FC » pour simuler ce jeu.
a) À l'aide de la calculatrice TI-92, déterminer la probabilité d'obtenir la position « franc-carreau ». Justifiez votre réponse.
Pour faire fonctionner la macro-construction « FC » plusieurs fois, il suffit de faire une animation sur le compteur N.



b) Pouvez-vous utiliser un calcul direct pour vérifier ces résultats expérimentaux ? Justifiez votre réponse.

Remarquons que l'énoncé remplace le mot ***chance*** par le mot ***probabilité***, sans pour autant faire une introduction formelle de cette notion : nous nous limitons ici à introduire une « étiquette » pour la pré-probabilité, connaissance-en-acte déjà mobilisée et institutionnalisée préalablement. Le mot « ***probabilité*** » est introduit ainsi comme « ***la proportion de boules blanches dans l'urne de Bernoulli qui modélise l'expérience aléatoire en jeu*** ». Nous faisons l'hypothèse que l'usage de ce mot n'est pas problématique pour les élèves car c'est un mot déjà utilisé par les élèves hors de leur scolarité, appartenant à leur champ d'expérience, au sens de (Boero, 1995).

Cette question a pour objectif de placer l'élève dans le processus de modélisation du jeu de Franc-Carreau. Il doit alors réinvestir la démarche introduite par les situations didactiques précédentes, « Expérience de Bernoulli » et « Urne à Pixels », pour déterminer la composition de cette urne de Bernoulli et justifier ainsi la réponse donnée. Remarquons que la demande de réinvestir cette démarche de modélisation est implicite, car la question est posée en termes de « donner la probabilité ». Du fait que les situations précédentes ont introduit la probabilité (les chances) d'obtenir un succès par l'interprétation de la proportion de boules dans une urne de Bernoulli, nous attendons que l'élève mobilise spontanément cette démarche pour résoudre le problème posé.

L'objectif implicite dans cette question est de trouver les conditions géométriques requises pour obtenir un succès lors de la réalisation de l'expérience aléatoire «jeu de Franc-Carreau », ce qui a été l'objet de la question précédente. Cette recherche de conditions fait ainsi partie du processus de modélisation dans lequel il est en train de s'engager.

Ainsi, étant identifiée l'expérience aléatoire Y en jeu, la tâche « déterminer la probabilité d'un événement X, issue d'une expérience aléatoire Y » est résolue par la technique :

i) identifier l'événement X comme étant le succès associé à cette expérience et en conséquence, le représenter par une catégorie de boules dans une urne de Bernoulli (par exemple, les boules blanches) ;
ii) donner la composition de l'urne de Bernoulli qui modélise Y ;
iii) identifier la proportion de boules blanches dans l'urne à la probabilité de l'événement X.

L'élève doit d'abord identifier le succès qu'il veut associer à l'expérience : soit le disque est à « franc-carreau », soit le disque coupe les bords du carré. Pour bien expliciter les deux catégories de résultats possibles, il doit choisir dans quelle catégorie, succès ou échec, la position-limite dans laquelle « le disque est tangent à un des côtés du carré RSTU » appartient. À la situation précédente, ce choix fait appel à la définition de l'urne à pixels qu'il doit considérer : figure avec bords compris ou en excluant les bords. Nous faisons l'hypothèse que l'élève associe le Cabri-dessin disponible à l'écran et la situation du jeu hors environnement informatique (EIA) : la position « tangente » pour le jeu place la pièce de monnaie dans un seul carreau [78], alors la position « tangente » pour le jeu dans Cabri doit placer le disque complètement dans le carré RSTU. Nous pouvons ainsi faire l'hypothèse que,

[78] Deux carreaux d'un même carrelage n'ont pas un côte commun, mais un joint commun.

même si l'élève est placé par l'énoncé dans un cadre géométrique, il contextualise les éléments qu'il est en train de mobiliser par rapport à l'expérience première, le jeu de Franc-Carreau. Le dessin donné dans l'énoncé qui représente la situation réelle est d'apparence identique à celui de Cabri. Il n'y a pas de problème de contextualisation pour l'élève.

Après cette précision sur la catégorisation des résultats, pour donner la valeur de la probabilité cherchée les stratégies accessibles à l'élève sont :

- ✓ estimation de la proportion par le rapport d'aires, introduit par la situation B, activité B_1, sous la forme $\dfrac{\text{nombre de pixels qui recouvrent } R'S'T'U'}{\text{nombre de pixels qui recouvrent } RSTU} \overset{\text{definition}}{=} \dfrac{\text{aire de } R'S'T'U'}{\text{aire de } RSTU}$;
- ✓ estimation de la proportion par l'analyse des fréquences obtenues expérimentalement par l'animation du compteur N et par l'usage de la macro-construction FC, introduit par la situation B, activité B_2.
- ✓ mise en œuvre d'un raccourci qui associe directement les rapports d'aires et les fréquences à la probabilité cherchée, sans faire appel à la modélisation.

Les réponses attendues sont, pour chacune des stratégies :

a) estimation de la proportion par le rapport d'aires.

Après avoir identifié le jeu de Franc-Carreau comme étant une expérience aléatoire pour laquelle le succès est d'obtenir la position « franc-carreau », l'élève compose l'urne de Bernoulli qui la modélise faisant appel au rapport d'aires.

$$\left.\begin{array}{l}\text{aire de } R'S'T'U' = 3{,}24 \text{ cm}^2\\ \text{aire de } RSTU = 9{,}00 \text{ cm}^2\end{array}\right\} \rightarrow \text{proportion de boules blanches dans l'urne de Bernoulli : } 36\ \%$$

Alors, la probabilité de faire franc-carreau est de 0,36 parce que l'urne de Bernoulli qui modélise ce jeu présenté à l'écran contient 36 % de boules blanches.

Ce type de justification, donnée en association avec la proportion de boules blanches dans l'urne de Bernoulli qui modélise le jeu, est un indicateur que l'élève réinvesti la notion de modèle d'urne de Bernoulli dans une situation différente de celle où le concept à été introduit. Il a réussi à utiliser l'urne à pixels déjà utilisée pour l'activité B_2, et ainsi, à mobiliser la pré-probabilité de façon adéquate. Autrement dit, un tel type de justification indique que l'élève mobilise correctement les conceptions qui ont été construites tout au long des activités précédentes sur reproductibilité, expérience aléatoire et sur la probabilité géométrique (pré-probabilité issue d'un rapport d'aires).

Remarquons que l'utilisation d'une démarche de modélisation lors de la mise en œuvre de cette stratégie pourra être dégagée de la justification donnée par l'élève à la demande de l'énoncé.

b) estimation de la proportion par analyse des fréquences.

L'institutionnalisation de l'activité B_2 a renforcé le besoin d'un grand nombre de répétitions d'une expérience aléatoire lorsque l'on envisage l'analyse des fréquences des résultats expérimentaux. Nous faisons ainsi l'hypothèse que l'élève va utiliser l'animation du compteur N au moins une fois pour obtenir le maximum de répétitions (il est possible d'enregistrer 999 répétitions sur une Cabri-table). Il peut même envisager de recommencer les répétitions par un retour à la version précédente de la figure à l'écran.

L'activation de l'outil « Trace » de Cabri pour « voir » les positions obtenues pour le positionnement du point P permet une appréhension perceptive de la distribution de ces positions dans RSTU. Cette appréhension pourra être à la base de l'acceptation, par l'élève, de l'hypothèse d'équiprobabilité sur les pixels qui tapissent le carré RSTU, hypothèse explicitement présentée par l'enseignant.

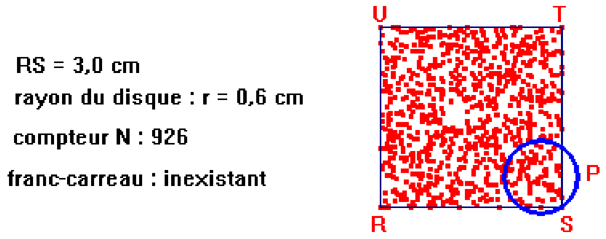


Figure 23

Pour la suite de la mise en place de cette stratégie, l'élève peut lire le tableur qui lui indique par exemple 330 succès sur 925 essais (35,7 %) : les 926 essais indiqués par le compteur N auxquels on enlève la première ligne de la Cabri-table, qui ne contient pas de résultat aléatoire. Cela peut le conduire à une estimation de 36 % de boules blanches dans l'urne de Bernoulli qui modéliserait le jeu. En conséquence, la réponse attendue est alors une probabilité approximative de 36 % ou 36 chances sur 100 d'obtenir franc-carreau. La variabilité des fréquences et leur stabilisation relative, mise en évidence par les deux situations didactiques précédentes, doit être mobilisée par l'élève comme une justification du caractère « approximatif » de la probabilité demandée. Autrement dit, ces notions seront mobilisées comme un critère de validité, tel que nous l'avons évoque au début de ce Chapitre.

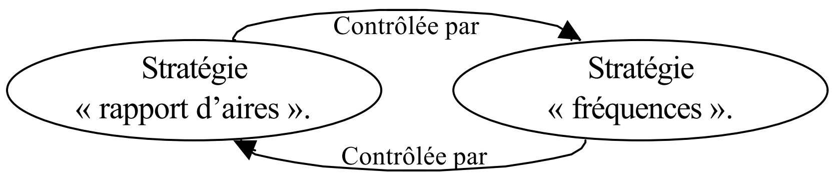
Ainsi que pour l'activité B_2, l'élève peut utiliser seulement ses propres résultats ou alors l'ensemble des résultats obtenus par les autres binômes de la classe afin de donner la composition approximative d'une urne de Bernoulli. Les résultats des binômes sont rendus disponibles par l'enseignant au fur et à mesure de la résolution du problème posé. Le tableau ci-dessous est un exemple de résultats expérimentaux. Nous l'avons construit par la réalisation de 10 séries de 998 essais.

Tableau 23 : Points obtenus en 10 séries, par paquets de 998 essais

	Nb de points obtenus	Nb de succès	fréquence de succès	Nb cumulé de points (T)	Nb cumulé de succès (S)	Rapport S/T
1	998	365	36,6%	998	365	36,6%
2	998	378	37,9%	1996	743	37,2%
3	998	368	36,9%	2994	1111	37,1%
4	998	352	35,3%	3992	1463	36,6%
5	998	394	39,5%	4990	1857	37,2%
6	998	382	38,3%	5988	2239	37,4%
7	998	370	37,1%	6986	2609	37,3%
8	998	352	35,3%	7984	2961	37,1%
9	998	384	38,5%	8982	3345	37,2%
10	998	379	38,0%	9980	3724	37,3%

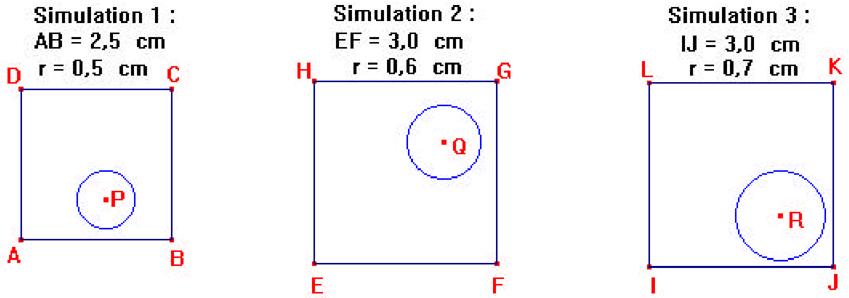
Dans cette stratégie, la réponse attendue est 37 %, différente de la réponse théorique 36 % de la stratégie précédente. Ainsi, l'élève produira un modèle approché issu de ses résultats expérimentaux.

Du fait que ces deux stratégies a) et b) que nous venons de décrire sont également accessibles grâce à l'institutionnalisation des notions et savoirs-faire introduits par la situation B, « Urne à Pixels », l'élève peut les valider lui-même, sans avoir besoin de l'intervention de l'enseignant.

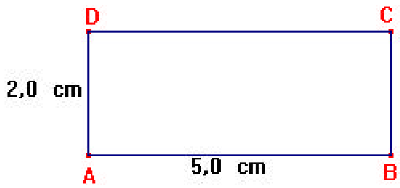


La dernière question de cette première version de l'activité C_1 propose trois jeux de Franc-Carreau à l'écran. L'objectif est de mettre l'élève en position de choisir un modèle pour représenter un jeu de Franc-Carreau pour lequel il pense avoir plus de chances d'obtenir un succès. Ensuite, on demande à cet élève de traduire le modèle choisi en termes d'urne à pixels, en gardant la configuration présentée par la situation B pour représenter cette urne : le rectangle contenant une partition qui limite la région de succès. L'énoncé proposé est le suivant :

3a) On construit trois simulations différentes du jeu avec un carré et un cercle dont les tailles sont différentes. Laquelle choisiriez-vous pour avoir plus de chances d'obtenir un succès ? Justifiez votre réponse.



3b) En utilisant la simulation que vous avez choisie, construisez une urne à pixels qui représente ce jeu. Justifiez votre réponse.



AE = ...

L'énoncé de cette question est complété par un tableau contenant les résultats de 998 essais de chacune des trois simulations proposées :

Tableau 24

Simulation 1 r = 0,5 cm et *l* = 2,5 cm			
n	**T**	**S**	**S/T**
1	50	19	38,0%
2	100	38	38,0%
3	150	58	38,7%
4	200	75	37,5%
5	250	93	37,2%
6	300	107	35,7%
7	350	131	37,4%
8	400	154	38,5%
9	450	172	38,2%
10	500	193	38,6%
11	550	205	37,3%
12	600	225	37,5%
13	650	237	36,5%
14	700	254	36,3%
15	750	272	36,3%
16	800	296	37,0%
17	850	316	37,2%
18	900	326	36,2%
19	950	345	36,3%
20	998	360	36,0%

Simulation 2 r = 0,6 cm et *l* = 3,0 cm			
n	**T**	**S**	**S/T**
1	50	21	42,0%
2	100	39	39,0%
3	150	57	38,0%
4	200	77	38,5%
5	250	92	36,8%
6	300	109	36,3%
7	350	132	37,7%
8	400	149	37,3%
9	450	165	36,7%
10	500	183	36,6%
11	550	204	37,1%
12	600	221	36,8%
13	650	239	36,8%
14	700	255	36,4%
15	750	273	36,4%
16	800	292	36,4%
17	850	313	36,5%
18	900	331	36,8%
19	950	349	36,7%
20	998	365	36,5%

Simulation 3 r = 0,7 cm et *l* = 3,0 cm			
n	**T**	**S**	**S/T**
1	50	13	26,0%
2	100	30	30,0%
3	150	41	27,3%
4	200	52	26,0%
5	250	68	27,2%
6	300	85	28,3%
7	350	101	28,9%
8	400	112	28,0%
9	450	125	27,8%
10	500	138	27,6%
11	550	153	27,8%
12	600	167	27,8%
13	650	179	27,5%
14	700	196	28,0%
15	750	212	28,3%
16	800	221	27,6%
17	850	236	27,8%
18	900	250	27,8%
19	950	264	27,8%
20	998	280	28,0%

Nous attendons que l'élève ramène la comparaison demandée à la composition des urnes de Bernoulli modélisant chacun des jeux, ainsi que cela a été introduit par l'activité A_2. L'accessibilité aux fréquences expérimentales et aux mesures attachées à chacune des simulations donne aux deux méthodes, « rapport d'aires » et « fréquences », le statut de savoir-faire ayant un même niveau de disponibilité chez l'élève. Le choix de la méthode pour la détermination de la composition de l'urne de Bernoulli est alors à la charge de l'élève et, par conséquent, le choix de la méthode de contrôle et de validation de cette composition.

Les valeurs fournies par chacune des simulations permettent déjà à l'élève une première évaluation qualitative des chances d'obtenir un succès, en excluant ainsi la simulation 3. À partir de la comparaison entre les côtés de chaque carré et les rayons respectifs des disques, ils peuvent déjà s'apercevoir que cette dernière simulation est moins intéressante que la deuxième : on a un rayon du disque plus grand pour un carré dont les dimensions sont les mêmes (EF = IJ et $r_2 < r_3$), ce qui implique que l'aire du carré qui représente la région de succès est plus grande dans la simulation 2.

Il reste alors à l'élève la tâche de faire la comparaison entre la simulation 1 et la simulation 2 : les jeux sont comparables car les urnes de Bernoulli qui les modélisent sont elles-mêmes équivalentes. Cela met en jeu les connaissances et le savoir-faire introduits par l'activité A_2, ainsi que la généralisation de la notion d'urne à pixels induite par le changement des figures de base lors de la question précédente de cette activité C_1. L'élève doit alors donner la composition de chacune des urnes modélisant les jeux simulés dans les deux cas, pour ensuite comparer les proportions qui indiquent le succès dans chacune de ces urnes.

Alors, une simple analyse du tableau fourni peut induire une **conjecture** selon laquelle **les deux urnes présentent la même proportion de boules blanches : dans les deux cas, les fréquences indiquent approximativement 36 %**. L'élève est déjà dans un contrat selon lequel il peut estimer la composition d'une urne de Bernoulli par une approximation de la fréquence stabilisée. Il pourra alors estimer 36 boules blanches parmi 100 boules dans une urne qui modéliserait les deux jeux. En outre, les activités précédentes ont déjà donné aux fréquences un statut de mesure approchée pour donner une valeur du rapport qui caractérise l'urne de Bernoulli.

La stratégie expérimentale est ainsi naturellement mise en œuvre pour aboutir à la conjecture « les deux simulations semblent donner des chances à peu près égales d'obtenir la position "*franc-carreau*" ». Il reste à valider théoriquement cette conjecture par un calcul. La situation B, activité B_2, a rendu le dispositif informatique fiable pour l'estimation d'une composition approximative, au dixième de pourcentage près, de l'urne cherchée. L'élève peut alors faire appel à cette connaissance pour valider pragmatiquement la conjecture qu'il vient de proposer, avant de se lancer dans les calculs de rapports des aires pour la valider théoriquement.

Du fait que la figure de base du dispositif «*urne à pixels* » a changé par rapport à celle de la situation B, l'élève peut aussi ne pas accepter la validation pragmatique que nous venons d'évoquer. Dans ce cas, il ne lui reste que la validation théorique. Les calculs nécessaires sont des savoirs-faire introduits par la première question de cette activité.

(a) Déterminer le rapport d'aires des figures attachées à la simulation 1, dont AB = 2,5 cm et r_1 = 0,5 cm.

$$p_1 = \frac{\text{aire de A'B'C'D'}}{\text{aire de ABCD}}$$

$$p_1 = \frac{(AB - 2.r_1)^2}{AB^2}$$

$$p_1 = 0{,}36$$

(b) Déterminer le rapport des aires des figures attachées à la simulation 2, où EF = 3,0 cm et r_2 = 0,6 cm.

$$p_2 = \frac{\text{aire de E'F'G'H'}}{\text{aire de EFGH}}$$

$$p_2 = \frac{(EF - 2.r_2)^2}{EF^2}$$

$$p_2 = 0{,}36$$

(c) Comparer les deux rapports p_1 et p_2.

Les deux rapports sont égaux. En conséquence, la conjecture formulée est valide : « les deux simulations donnent les mêmes chances d'obtenir la position "*franc-carreau*" dans le jeu ».

Finalement pour donner la longueur du segment [AE] [79], l'élève doit faire le lien entre la présentation de l'urne à pixels (le rectangle utilisé par la situation B) et le carré utilisé par cette situation C. Cette correspondance n'est pas immédiate, car elle représente un retour sur le modèle : l'élève connaît le rapport des aires, il doit alors construire une urne à pixels présentant ce rapport. Nous supposons que l'élève rencontrera un certain degré de difficulté,

---

[79] Ce qui est demandée lors de la dernière question « construisez une urne à pixels qui représente ce jeu ».

selon son niveau de conceptualisation de la notion de modèle d'urne de Bernoulli. Autrement dit, si l'élève accepte ce modèle comme le représentant des expériences en jeu, il peut reconstituer une de ses expériences à partir de la proportion qui caractérise cette urne. Cette proportion, l'élève connaît par l'assimilation *rapport d'aires/probabilité/proportion de boules blanches dans l'urne*. La stratégie attendue est alors :

$$\left.\begin{array}{l}\text{aire du rectangle ABCD} : 10\ \text{cm}^2.\\ \text{probabilit é d' obtenir un succès} : 36\ \%\end{array}\right\} \Rightarrow \text{aire de AEFD} = 0{,}36.\ \text{aire de ABCD}$$

Donc, par l'activité B_1, AE = 0,36.AB

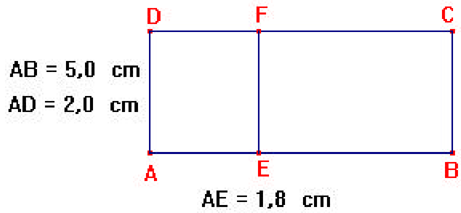


Figure 24

Cette question représente un saut informationnel à cause de la non-congruence par rapport aux activités travaillées jusque-là. Si l'élève part normalement d'une caractérisation géométrique de l'expérience aléatoire pour dégager une probabilité, cette dernière question demande d'obtenir une caractérisation géométrique d'une probabilité donnée, ainsi que de « re-constituer la figure de départ ».

§1.1.2.2. Deuxième version

Présentons, dans la suite, la deuxième version de cette activité. Elle est organisée par l'enchaînement de deux questions plus ouvertes que celles qui constituaient la version précédente. Le but est de dégager ce que les élèves ont retenu comme stratégie pour déterminer la composition d'une urne de Bernoulli modélisant une expérience aléatoire dans un EIA.

Dans cette version, l'enseignant a à sa charge la présentation du fonctionnement de la version informatique du jeu de Franc-Carreau à l'aide de la macro-construction « FC » [(80)]. L'objectif de cette présentation est de conduire les élèves à l'élargissement du domaine de validité lié à la conception d'urne à pixels par le changement des figures de base de ce dispositif informatique, conformément aux objectifs de cette situation didactique : le changement de la région qui délimite le succès d'une région explicite à une région implicite mais accessible par un raisonnement géométrique. La dévolution du problème par le contexte

[(80)] Macro qui place un cercle au hasard dans le carré ABCD, de façon à que son centre soit à l'intérieur de ce carré et dont la position est une variable de distribution uniforme dans ce carré.

proposé par la situation didactique doit engager les élèves à la recherche de délimitation d'une « région de succès » dans le carré ABCD. Cette délimitation est analogue au rectangle AEFD présenté aux élèves dans l'activité B_2 comme région dans laquelle le pixel $\wp$ devrait tomber pour qu'on puisse classer le résultat comme un succès lors de la réalisation de l'expérience aléatoire *UP*[(81)]. L'intervention de l'enseignant sera nécessaire si cette dévolution n'atteint pas son objectif et les élèves ne s'engagent pas dans cette recherche.

Ensuite, l'activité propose aux élèves d'ouvrir la figure S3F1 et la barre d'outils S3. Cette barre d'outils met en évidence l'icône pour activer la macro-construction FC, ainsi que l'icône pour activer l'animation du compteur N. Elle ne contient pas les outils de mesure, comme la barre d'outils S2 utilisée pour la situation B de cette ingénierie.

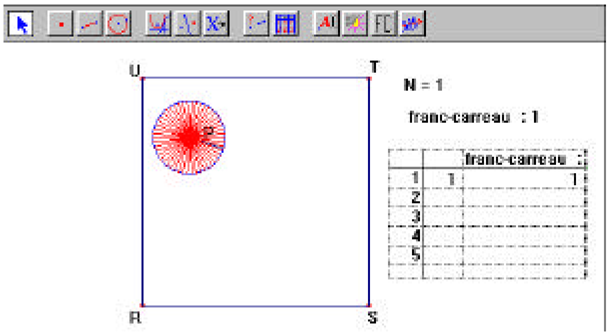


Figure 25

L'énoncé proposé est le suivant :

Présentation du jeu de Franc-Carreau : Ce jeu a été étudié par la première fois en 1733 par un naturaliste et mathématicien français, Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon. Il consiste en jeter un écu sur un carrelage. Les joueurs parient sur la position finale de l'écu : tombera-t-il entièrement sur un seul carreau (franc-carreau), sur un joint entre deux carreaux, ou encore sur deux, trois ou quatre joints ? Considérons comme succès de cette expérience aléatoire « la pièce tombe à franc-carreau ». 1) Est-il possible de représenter ce jeu par une urne de Bernoulli ? Si oui, laquelle ? Si non, pourquoi ?

Nous attendons que l'élève identifie le jeu de Franc-Carreau, selon la présentation faite par l'énoncé et par l'enseignant, comme étant une expérience de Bernoulli : une expérience aléatoire à deux issues possibles, succès pour la position « franc-carreau », ou échec pour toute position finale de la pièce qui ne soit pas «franc-carreau ». Le jeu est donc modélisable par une urne de Bernoulli dont l'élève doit donner une composition.

Il nous faut remarquer que les élèves ne peuvent pas activer la macro-construction « FC », même si l'icône est dans le menu, car il leur manque le segment qui représente le

[(81)] UP : « choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD », le succès étant « le pixel est dans le rectangle AEFD ».

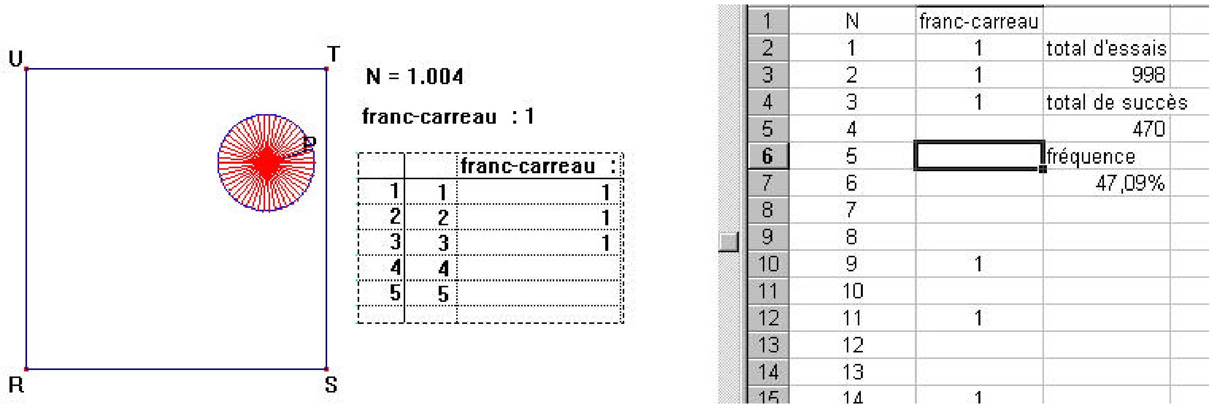
rayon du disque. Nous avons fait ce choix en supposant que les élèves ont bien assimilé l'équivalence entre plusieurs répétitions de l'expérience aléatoire avec cette macro (assez coûteuse) et l'animation du compteur N. Cette équivalence a été introduite par la situation didactique précédente, « Urne à Pixels ». La méthode « fréquences » est alors tributaire de l'usage de l'animation du compteur N, sauf si l'élève construit lui-même le segment qui représente le rayon du disque. Nous faisons l'hypothèse que cette construction est peu probable : les éléments proposés par l'interface du dispositif informatique induisent fortement l'usage, par contrat, de l'animation de N comme outil de déclanchement de la simulation informatique, et donc, de la méthode « fréquence ».

Tel que nous l'avons déjà dit, la barre d'outils S3 ne présente pas les outils de mesure de longueur et de mesure d'aires. Cela empêche l'élève d'utiliser la méthode « rapport d'aires » pour donner une composition d'urne de Bernoulli, même si cet élève envisage de l'utiliser comme la méthode la plus efficace. Nous cherchons ainsi à ce que les élèves se placent dans une problématique d'approximation et empêchons qu'ils recherchent par un effet de contrat un résultat numérique par des opérations sur les données disponibles. Il s'agit donc de favoriser une démarche de modélisation, dans laquelle l'objectif n'est pas tant de trouver le bon résultat mais d'être capable de trouver une méthode que l'approche.

Alors, le procédé de résolution disponible est fondé sur les connaissances introduites par les activités précédentes de l'ingénierie et consiste en :

i) Analyser le jeu de Franc-Carreau en termes d'expérience aléatoire, en dégageant la possibilité de classer les résultats possibles en deux catégories, « succès » et « échec » ;
ii) Reconnaître dans cette expérience aléatoire la configuration d'une expérience de Bernoulli ;
iii) Déclancher la simulation pour estimer la proportion d'une urne de Bernoulli qui modélise ce jeu.

L'élève s'engage alors dans une simulation pour laquelle il doit décider le nombre d'essais qu'il veut réaliser. Il peut aussi décider de faire quelques simulations afin d'estimer la proportion qui caractérise l'urne de Bernoulli cherchée par l'étude de la variation des fréquences obtenues. La figure ci-dessous illustre un résultat possible d'une série de 998 essais.



	N	franc-carreau	
2	1	1	total d'essais
3	2	1	998
4	3	1	total de succès
5	4		470
6	5		fréquence
7	6		47,09%
8	7		
9	8		
10	9	1	
11	10		
12	11	1	
13	12		
14	13		
15	14	1	

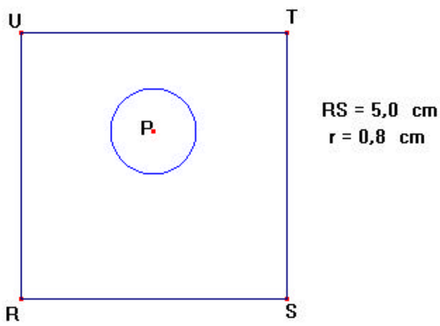
Figure 26

À partir de ces résultats, l'élève peut estimer une composition approximative de l'urne de Bernoulli envisagée : approximativement 47 % de boules blanches dans l'urne.

La validation des résultats obtenus lorsque l'élève s'engage dans une stratégie pour accomplir cette technique est fondée sur la fiabilité du dispositif informatique, introduite par l'activité B_2. Cela indique la mobilisation du critère de validité introduit par cette activité B_2 : **lorsqu'on réalise un très grand nombre d'essais d'une expérience aléatoire, la fréquence de succès est un estimateur de la proportion de boules blanches dans l'urne de Bernoulli qui modélise cette expérience**.

En conséquence, l'élève n'a pas besoin de contrôler ses résultats par une deuxième méthode, en l'occurrence la méthode « rapport d'aires ». De plus, la fiabilité du dispositif informatique a été aussi introduite sous la forme d'un nouveau contrat par l'activité B_2, de façon à permettre à l'élève d'établir un voisinage dans lequel le rapport "*p*" devrait se situer. Autrement dit, les résultats expérimentaux obtenus ou fournis lors de l'activité B_2 indiquent que les fréquences au but d'un grand nombre d'essais estiment la valeur "*p*" au dixième de pourcentage près.

L'enseignant introduit alors la deuxième question dans cette version de l'activité C_1 en demandant à l'élève d'ouvrir la **figure S3F2**. Dans cette figure, le point P, centre du disque est un point libre qui permet de déplacer le disque dans la fenêtre active de Cabri. Cette information n'est pas donnée aux élèves, mais ils peuvent s'en rendre compte facilement par la manipulation de la figure.



Ainsi, dans ce contexte, la question suivante est posée :

2) En considérant les mesures données à l'écran, quelle urne de Bernoulli proposeriez-vous pour représenter ce jeu ? Justifiez votre réponse. Nombre total de boules : _____ Nombre de boules blanches : ______ Justification :

L'énoncé demande explicitement le nombre de boules et non la proportion dans l'urne et suggère l'utilisation de la méthode « rapport d'aires », induite par l'expression « *en considérant les mesures données à l'écran…* ». L'élève est alors placé devant une situation de discrétisation de surfaces, introduite par l'activité B_1 pour pouvoir associer le rapport d'aires (mesure continue) à la composition de l'urne de Bernoulli demandée. La question précédente lui a montré qu'il existe une région à l'intérieur du carré RSTU qui va représenter toutes les positions possibles du point P, centre du disque, conduisant à l'obtention de « franc-carreau ». Il doit alors délimiter, explicitement, cette région. L'activation de l'outil « Trace » dans Cabri permet d'obtenir une visualisation de la région cherchée par le déplacement du point P de façon à que le disque ne déborde pas le carré RSTU.

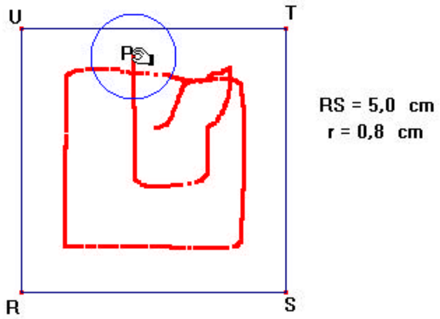


Figure 27

Ainsi, l'élève peut formuler la conjecture de l'existence d'un carré à l'intérieur de RSTU, de côtés parallèles à ce carré et de même centre. Visuellement il peut aussi apprécier la longueur de ce carré intérieur, que nous désignons dans la suite par R'S'T'U' (cf. analyse de la première version de cette activité). Alors, R'S' = RS – 2.r, soit R'S' = 3,4 cm.

Le raisonnement est ainsi le même que celui que nous avons développé pour la résolution de la première question de la première version de cette activité : l'élève doit calculer un rapport d'aires. L'activité B_1 lui permet de dire que ce rapport est, par définition, le rapport entre le nombre de pixels qui recouvrent chacun de ces carrés. De même, ce rapport est aussi le rapport entre le nombre de boules blanches et le nombre total de boules dans une urne de Bernoulli.

Ainsi, la proportion p cherchée sera $p = \frac{3{,}4^2}{5^2}$, ce qui donne p = 0,4624. En prenant l'entier le plus proche (méthode d'approximation dans le contrat usuel), l'élève peut donner la composition de 46 boules blanches et 100 boules au total dans l'urne de Bernoulli.

Cette composition n'est pas en conflit avec les résultats expérimentaux que l'élève peut avoir obtenu lors de la résolution de la première question. La fiabilité du dispositif informatique lui permet d'affirmer cette conformité (cette concordance) entre les deux compositions de l'urne de Bernoulli sans qu'il ait à ré-initialiser la simulation un trop grand nombre de fois.

Remarquons que cette deuxième version ne propose pas la comparaison entre les divers jeux de Franc-Carreau. Cette question est complètement remplacée par le jeu du triangle, qui constitue l'activité C_2, qui propose une comparaison beaucoup plus riche et que nous présenterons dans le paragraphe suivant, lors de l'analyse a priori de cette activité.

Pour conclure l'analyse a priori de cette activité C_1, remarquons que le problème de choisir entre plusieurs jeux de Franc-Carreau peut parfois être résolu qualitativement de proche en proche, sauf si les longueurs du côté du carré et du rayon varient dans le même sens. Nous pouvons attendre deux types de raisonnements qualitatifs qui permettent de résoudre les problèmes appartenant à la catégorie « choisir entre deux jeux de Franc-Carreau » :

- ✓ Modification positionnelle de la figure (Duval, 1994) : transférer le premier disque dans le deuxième carré et le comparer à l'autre disque pour établir l'équivalence ou la non-équivalence entre les jeux ;
- ✓ Raisonnement comparatif : constater l'égalité entre les rapports des côtés et les rapports des rayons pour établir l'équivalence ou la non-équivalence entre les jeux.

Ce dernier raisonnement mettrait en jeu, de manière erronée, une idée de pré-probabilité associée à une répartition uniforme de la probabilité sur les longueurs.

§1.2. Activité C_2 : le jeu du triangle

§1.2.1. Présentation de l'activité

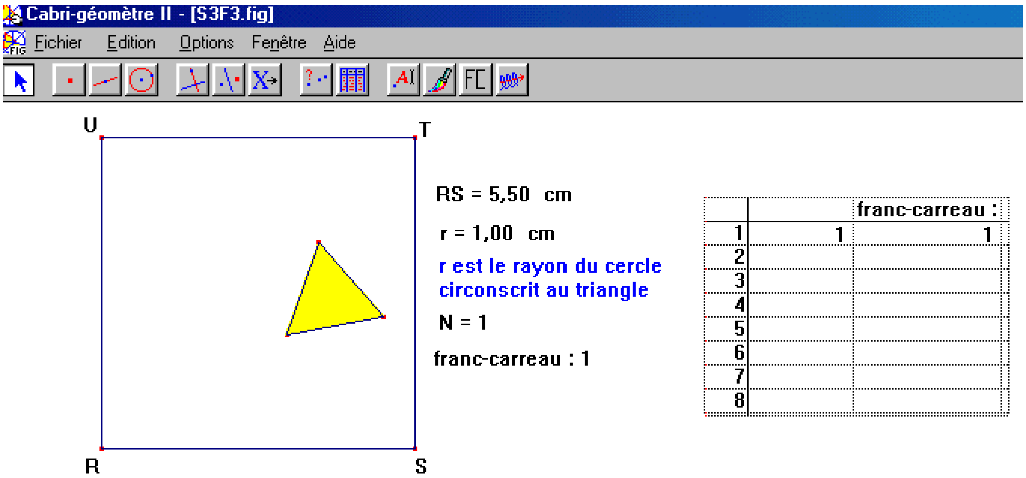
Cette activité sert à mettre en évidence l'existence de certaines probabilités pour lesquelles le calcul a priori est trop coûteux, voire inaccessible. L'enjeu de l'activité C_2 est ainsi de faire fonctionner la simulation en tant qu'outil pour estimer la probabilité de faire « franc-carreau » lorsque l'objet utilisé à la place du disque ne permet pas un calcul a priori. Autrement dit, cette activité présente la simulation du jeu du triangle comme une “boîte noire” que l’élève doit décoder pour expliciter le modèle attaché, et donc évaluer la probabilité de faire «franc-carreau » au sein de ce modèle.

L’activité consiste en une comparaison entre les chances de faire « franc-carreau » en utilisant un disque (représentant de la pièce de monnaie) et un triangle équilatéral doté d’une rotation aléatoire autour de son centre. L’utilisation d’objets géométriques distincts pour les deux jeux qui doivent être comparés, le franc-carreau et le triangle, ne permet pas que cette comparaison entre les expériences aléatoires porte sur leur apparence géométrique. Nous envisageons ainsi un réinvestissement sur les méthodes de comparaison qui ont été introduites par les situations précédentes, « Expérience de Bernoulli » et « Urne à Pixels » : la recherche d’une urne de Bernoulli modélisant chacun des jeux pour, ensuite, les comparer.

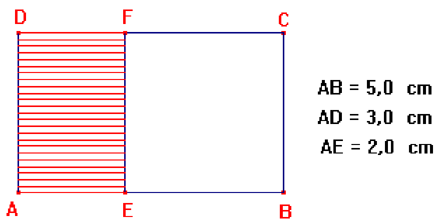
§1.2.2. Analyse de la tâche

L’encadré ci-dessous présente l’énoncé proposé aux élèves par la seule tâche de cette activité :

Dans Cabri, ouvrez la figure S3F3.
Les élèves auront à l’écran le Cabri-dessin ci-dessous.



Considérons le jeu de Franc-Carreau. Nous voulons remplacer, dans ce jeu, l’écu par une plaque triangulaire (triangle équilatéral). Quel jeu choisiriez-vous pour avoir plus de chances de faire «franc-carreau » : celui avec le triangle qui est présenté à l’écran, celui avec le disque présenté par l’exercice précédent, ou encore l’urne à pixels ci-dessous ? Justifiez votre réponse.



Justification :

Pour cette analyse, nous utiliserons les dimensions pour le jeu de Franc-Carreau proposées par la deuxième version de l'activité C_1 lors de la comparaison demandée par cette activité. Nous avons ainsi les mesures AB = 5,0 cm et r = 0,8 cm, ce qui nous permet de calculer les chances de faire « franc-carreau » : 46 %. Si l'élève fait appel au résultat expérimental qu'il a obtenu pour ce jeu, il pourra par exemple composer une urne de Bernoulli avec un rapport approximatif de 47 % de boules blanches. Ces deux démarches ont été développées au cours de l'analyse a priori de la deuxième version de l'activité précédente, C_1.

L'urne à pixels ne permet à l'élève que le calcul a priori du rapport d'aires (ou rapport de longueurs), tel que nous l'avons présenté dans l'analyse a priori de l'activité B_2 car cette urne n'est pas disponible à l'écran. Cette urne présentait ainsi 40 % de chances d'obtenir un succès dans l'expérience aléatoire « choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD », le succès étant « le pixel est dans le rectangle AEFD ».

Ainsi, avec ces données numériques, la simple comparaison entre ces deux jeux est suffisante pour éliminer l'urne à pixels comme le jeu qui donne le moins de chances d'avoir un succès.

La construction du jeu du triangle avec Cabri-géomètre II nous a permis d'introduire quelques contraintes jouant le rôle de variables didactiques pour la comparaison entre le jeu de Franc-Carreau et le jeu du triangle :

- Les dimensions varient dans le même sens. C'est-à-dire que le côté du carré pour le jeu de Franc-Carreau est plus grand que celui du jeu du triangle, ainsi que le rayon du disque et le rayon du cercle circonscrit au triangle. Cela rend impossible une analyse qualitative pour choisir le jeu qui donne le plus de chances de faire « franc-carreau » ;
- La rotation aléatoire du triangle autour de son centre en association avec l'emplacement aléatoire de ce centre rend impossible le calcul a priori des chances, au moins pour les élèves au niveau du Collège.

Dans une appréhension opératoire de la figure donnée par le jeu du triangle, les élèves peuvent réaliser une modification positionnelle. Cependant, la seule indication à laquelle ils peuvent aboutir sera celle qui est représentée par la figure ci-contre. Nous signalons aussi qu'une telle appréhension de la figure est très peu

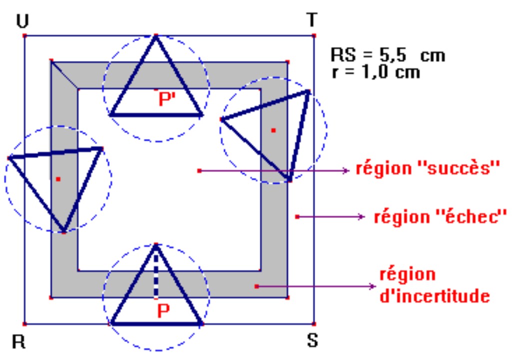


Figure 28

probable pour des élèves à cause de la complexité des propriétés géométriques en jeu pour la mise en œuvre d'une telle modification figurale. Par exemple, la visualisation du cercle circonscrit et la rotation du triangle autour de son centre, ses sommets pouvant être situés en n'importe quels points sur le cercle.

Les contraintes ci-dessus rendent la méthode expérimentale par l'étude des fréquences comme la seule démarche envisageable pour que l'élève puisse estimer les chances d'obtenir « franc-carreau ». Ainsi, nous attendons que l'élève mette en œuvre l'animation du compteur pour obtenir les fréquences et donc, estimer les chances de faire « franc-carreau ». Cette démarche a été introduite par les activités précédentes, au sein d'un processus de modélisation. Nous attendons ainsi que l'élève fasse cette estimation le conduisant à la composition d'une urne de Bernoulli qui modélise le jeu, même si cette urne reste implicite dans la résolution de ce problème. La demande de justification pourra alors déclancher son explicitation.

L'analyse des réponses données par les élèves (les valeurs qu'ils attribuent aux chances de faire « franc-carreau » pour chaque jeu) et les justifications qu'ils proposent peuvent nous indiquer le passage par le processus de modélisation. Citons un élève qui estime les chances pour le jeu du triangle comme un nombre non entier. Cet élève doit avoir utilisé un raccourci qui l'a conduit directement des fréquences aux chances, sans qu'il ait essayé de comprendre cette liaison. Dans un deuxième exemple, les chances peuvent être exprimées comme un nombre entier, la justification n'indiquant pas que cette valeur a été estimée au sein d'un modèle d'urne de Bernoulli. Leur démarche reste alors implicite et la connaissance acquise reste privée (Perrin-Glorian, 1999).

Pour pouvoir anticiper sur la résolution du problème, nous avons réalisé 10 séries de 998 essais de cette simulation, et nous avons obtenu les résultats ci-dessous.

Tableau 25 : Points obtenus en 10 séries, par paquets de 998 essais

	Nb de points obtenus	Nb de succès	fréquence de succès	Nb cumulé de points (T)	Nb cumulé de succès (S)	Rapport S/T
1	998	516	51,7%	998	516	51,7%
2	998	494	49,5%	1996	1010	50,6%
3	998	492	49,3%	2994	1502	50,2%
4	998	529	53,0%	3992	2031	50,9%
5	998	477	47,8%	4990	2508	50,3%
6	998	480	48,1%	5988	2988	49,9%
7	998	497	49,8%	6986	3485	49,9%
8	998	480	48,1%	7984	3965	49,7%
9	998	497	49,8%	8982	4462	49,7%
10	998	502	50,3%	9980	4964	49,7%

Le tableau nous indique alors que ce jeu du triangle peut être modélisé par une urne de Bernoulli contenant à peu près le même nombre de boules blanches et de boules noires. Les activités précédentes nous permettent d'inférer que le « vrai » rapport entre les boules blanches et le nombre total de boules se trouve dans un voisinage de 49,7 %. Une composition possible serait alors 49 boules parmi 100 boules dans cette urne et donc, on peut estimer avoir 49 % de chances de faire « franc-carreau » dans ce jeu.

Finalement, en revenant sur la comparaison entre les trois jeux, cette dernière estimation permet de choisir le jeu du triangle comme celui qui donne le plus de chance de faire « franc-carreau ».

§1.3. Conclusion de l'analyse a priori de la situation « Franc-Carreau »

La situation didactique «Franc-Carreau » a été conçue pour provoquer un réinvestissement de la part des élèves du processus de modélisation introduit par les deux situations précédentes, « Expérience de Bernoulli » et « Urne à Pixels ». Nous attendons de pouvoir dégager des éléments permettant une analyse du niveau de conceptualisation et de mobilisation de la notion d'urne de Bernoulli, selon les termes de Robert (1998). L'analyse a priori des activités qui constituent cette situation « Franc-Carreau » nous a permis de montrer la viabilité d'un réinvestissement sur cette notion selon les trois niveaux identifiés par Robert :

- ✓ un réinvestissement spontané. La notion est alors une connaissance disponible ;
- ✓ un réinvestissement induit par l'enseignant ou par le contexte. La notion est alors une connaissance mobilisable ;
- ✓ un réinvestissement algorithmique (l'élève se construit un algorithme localement efficace permettant de passer directement du rapport d'aires ou des fréquences aux chances d'obtenir un succès, sans indiquer l'urne de Bernoulli en jeu). La notion est alors une connaissance technique.

Remarquons qu'un réinvestissement algorithmique peut indiquer que l'élève ne cherche pas à comprendre la signification des liens qu'il établit entre les rapports d'aires, les fréquences et la pré-probabilité. Cela renvoit au passage au domaine pseudo-concret pour résoudre un problème proposé dans le domaine de la réalité : l'élève qui met en œuvre cet algorithme ne réalise pas ce passage. Il reste alors dans une position de mélange entre réalité et modèle, mélange qui a été signalé comme source d'obstacles à l'apprentissage du calcul des probabilités. (Girard & Parzysz, 1998 et Girard, 1997).

§2. Déroulement et analyse a posteriori des activités qui composent la situation « Franc-Carreau »

Nous retiendrons pour cette analyse, ainsi que pour les situations didactiques précédentes, l'organisation des élèves selon deux groupes : la classe de Troisième et la classe de Seconde. La différence dans l'environnement informatique qui est due aux différents outils, TI-92 ou ordinateur, mis à disposition des élèves, est un facteur assez déterminant pour le déroulement de cette situation. Ainsi, nous envisageons de dégager les conséquences didactiques dues à l'usage de chacun de ces outils, tout en soulignant que le dispositif informatique « urne à pixels » est constitué selon les mêmes principes dans les deux environnements : l'association entre le logiciel Cabri-géomètre II et un tableur (cf. §3 du Chapitre III).

Nous envisageons par cette analyse de dégager des éléments suffisants pour conclure sur l'apprentissage chez ces élèves des notions d'expérience aléatoire, d'urne de Bernoulli, ainsi que de la démarche de modélisation. L'analyse du corpus constitué par les productions des élèves ainsi que par leurs dialogues et par les interventions de l'enseignant pendant le déroulement des activités nous permettront aussi de compléter l'analyse de la situation didactique « Urne à Pixels ».

§2.1. Activité C1 : le jeu de Franc-Carreau

§2.1.1. Les questions auxquelles nous voulons répondre

En reprenant l'analyse a priori de cette activité, nous dégageons une question qui nous semble cruciale pour la validation de notre ingénierie didactique : **les élèves réinvestissent-ils, spontanément, les notions et savoirs-faire introduits par les situations didactiques précédentes pour résoudre les tâches ici proposées ?**

Pour pouvoir dégager les éléments nous permettant de répondre à cette question, nous la reformulons par les deux sous-questions suivantes :

1) Dans quelles conditions didactiques, les élèves mettent en fonctionnement les deux méthodes [82] introduites par les situations précédentes comme stratégies principales de résolution, ou comme outils de validation, lorsqu'ils sont en train de résoudre les tâches proposées ici ?
2) Les élèves traduisent-ils spontanément un rapport d'aires en termes de pré-probabilité, conformément à ce que nous avons supposé au paragraphe §3 du Chapitre III, lors de la

[82] La méthode expérimentale par l'analyse des fréquences et la méthode du calcul a priori du rapport d'aires.

constitution du dispositif « urne à pixels » ?

§2.1.2. Le déroulement effectif de l'activité

Premier Groupe : Classe de Troisième.

➯ **Premier moment de la séance : retour sur l'activité B_2.**

La séance commence par un retour sur l'activité B_2, menée lors de la semaine précédente et que n'a pas rempli ses objectifs à cause des difficultés de manipulation du dispositif informatique par les élèves. L'enseignant revient ainsi sur les consignes de manipulations, en utilisant une calculatrice TI-92 branchée sur le rétroprojecteur, de façon à ce que les élèves puissent suivre chaque étape de cette manipulation et les résultats ainsi obtenus.

L'enseignant réintroduit l'usage du compteur : il présente ce compteur comme le nombre de points qui vont être placés par l'ordinateur lors de la mise en œuvre de l'expérimentation. Pour l'introduction de l'objet « pixel », il a choisi de le faire en association avec la géométrie élémentaire :

> Prof : Le point est ce petit carré. Pour simplifier les choses, on va dire que ça correspond à des pixels. On peut imaginer que ce rectangle ABCD il est rempli de pixels. (il explique ensuite le fonctionnement de la machine) : les pixels sont là, mais on ne les voit pas. Ceux qu'on voit, ont été noircis. Donc en fait on peut imaginer que tout le rectangle est tapissé des points qui sont comme ça.

Nous avons observé que la manipulation de la calculatrice est difficile pour les élèves, même si ils essayent de suivre ce qu'ils voient à l'écran de l'enseignant. Ainsi, l'enseignant a pris en charge l'animation demandée par l'activité B_2 pour l'introduction de la méthode expérimentale afin d'estimer la pré-probabilité. Son objectif était de faire avancer les élèves vers la situation C. Ainsi, l'enseignant a proposé l'animation du compteur pour estimer les chances que le point P soit dans le rectangle AEFD en faisant lui-même, sur sa propre calculatrice, cette manipulation. Ensuite, devant la difficulté des élèves de suivre l'usage du tableur en même temps que l'écran avec le Cabri-dessin, l'enseignant a proposé le comptage visuel des succès. Il a réalisé quelques animations et, à chaque « paquet », il demandait aux élèves le nombre de succès qu'ils ont pu observer. La méthode expérimentale est finalement introduite par la demande du calcul du rapport entre le nombre de succès et le nombre de points obtenu, demande faite par l'enseignant afin que les élèves puissent remplir le tableau fourni pour cette activité (tableau 14, présenté au Chapitre V).

	Nb total de points obtenus	Nb succès	Nb cumulé de points (T)	Nb cumulé de succès (S)	Rapport S/T
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

L'enseignant a reformulé la question posée par l'énoncé en remplaçant le rapport S/T par le pourcentage : « *on veut savoir le pourcentage de succès* ». Nous pouvons ainsi remarquer un essai de maintenir le lien avec les contenus statistiques, établi lors de la première séance pour la situation A, « Expérience de Bernoulli », présentée au Chapitre IV.

À partir des réponses des élèves (33 points et 16 succès) il a repris son discours en reformulant encore la question :

> Prof : Alors 16 sur 33 ça va me donner le rapport des deux. Si je vous demande le pourcentage ? (il fait au tableau).

Les élèves font les calculs avec l'enseignant.

> Prof : Comment on fait si on veut avoir le pourcentage ?
> Élèves : multiplie par 100.
> Prof : 48 %. On recommence.

L'enseignant a recommencé l'animation en demandant aux élèves de compter les succès :

> Prof : tout le monde est prêt ? Attention. Voilà.

Les réponses des élèves ne sont pas tout à fait les mêmes, mais l'enseignant n'a pas pris en compte ces différences. Il a utilisé les réponses d'un des élèves pour faire les calculs au tableau. Il a distribué alors les feuilles contenant les résultats des simulations que nous avons fait pour compléter les informations disponibles pour les élèves. Nous pouvons remarquer toujours le projet de l'enseignant de faire avancer le temps didactique. L'objectif de l'activité B_2 dévient alors d'introduire les conditions pour la mise en place de la situation didactique C, « Franc-Carreau ».

> Prof : Ces simulations, on les a faits. Voici les résultats. Alors, on regarde les fiches et on regarde les résultats qu'on a obtenus. Qu'est-ce que l'on constate sur le rapport entre le nombre de succès et le nombre de points tirés ?
> Élève : c'est toujours à peu près la moitié.
> Prof : c'est toujours à peu près ?
> Élève : la moitié.
> Prof : Autour de combien de pour cent ?
> Élève : autour de 40 %.
> Prof : Autour de 40 %. D'accord. Alors, qu'est-ce que ça veut dire qu'on est autour de 40 % ?
> Élèves : (…)
> Prof : On a … Erik dit qu'on a à peu près moins de la moitié des chances en fait de tomber … d'avoir un succès. Alors, si on (…), on saura qu'on aura un petit peu moins d'une chance sur

deux d'avoir un succès. Si je veux jouer avec quelqu'un … si je veux jouer avec quelqu'un à ce jeu-là … je dis, voilà, on va faire un pari, etcetera. Est-ce que je pourrai prévoir (…) on donne chacun de nous un pourcentage de succès pour ce jeu-là, et celui qui est le plus près il va gagner, d'accord ? Bien, si je veux savoir combien on va avoir de succès à peu près, est-ce que je peux prévoir en fonction de la figure que j'ai ? J'ai la possibilité de modifier cette figure. Je modifie la figure et après on joue. (l'enseignant modifie la position du point E sur le segment [AB]). (…) si je dis que je veux avoir 30 % de chances d'avoir un succès, qu'est-ce que je dois faire sur la figure pour avoir 30 % de succès ?
Élève : il faut mettre E … euh…
Élève : il faut que le machin, il soit …
Prof : hein ?
Élève : il faut que le machin il soit 30 % de l'autre.
Prof : c'est-à-dire quoi ?
Élève : (…)
Prof : il faut que [AE] fasse 30 % de [AB]. Si je veux avoir 75 % de succès, où je dois placer le point E ?

L'enseignant a continué à développer des exemples qui associent les chances d'avoir un succès au rapport entre les longueurs des segments [AE] et [AB]. Il valide la proposition de l'élève en disant explicitement « où je dois placer le point E ». On remarque aussi que l'enseignant utilise explicitement le mot « simulation » pour désigner toute manipulation faite dans l'environnement informatique. Il place les expérimentations dans cet environnement comme étant la simulation de l'expérience proposée sur la fiche des élèves. Nous dégageons des échanges intergroupes la délimitation du domaine de fonctionnement du modèle sur lequel s'appuie la simulation : ce modèle n'est pas explicite pour les élèves. La simulation informatique a ainsi un statut de « boîte noire » : les élèves doivent la manipuler pour dégager les caractéristiques pertinentes du modèle. Autrement dit, les élèves doivent reconnaître le domaine de fonctionnement attaché au modèle qui pilote la simulation.

Cette identification n'est pas problématique pour les élèves, du fait qui leur raisonnement a été guidé par le discours de l'enseignant. Ils acceptent alors que la proportion caractérisant l'urne de Bernoulli qui modélise le jeu présenté dans l'environnement informatique dépend de la position du point E sur le segment [AB]. Ils réinvestissent ainsi les résultats institutionnalisés à la fin de l'activité B_1.

Dans une deuxième étape de ce retour sur l'activité B_2, l'enseignant institutionnalise le lien entre les résultats expérimentaux et le calcul du rapport d'aires.

Prof : bon, en fait le résultat qu'on vient d'avoir avec la simulation qui a été faite ici, est-ce que j'aurais pu le prévoir sans faire la simulation ?
Élèves : (…)
Prof : d'après ce qu'on avait vu la semaine dernière, que Maxime est allé au tableau, ça dépendait de quoi ?
Élèves : (…)
Prof : ça dépendait de quoi sur ma figure ? Le rapport entre l'aire du rectangle AEFD par rapport au rectangle ABCD ?
Élèves : (…)
Prof : ça dépendait de [AE]. Bien, on pouvait prévoir au départ la probabilité qu'on trouve en fait, le rapport du nombre de succès au nombre de coups tirés. D'accord ?

Jusqu'à ce moment, les élèves ne sont pas trop engagés dans l'activité, sauf lorsque l'enseignant leur demande de compter les succès. Nous dégageons alors un problème dans la dévolution du problème : la difficulté de manipulation du dispositif informatique lors de la séance précédente est devenue un obstacle didactique que la dévolution n'a pas pris en charge. L'essai de l'enseignant de les amener à prendre en considération le lien entre les résultats expérimentaux, les rapports des aires et des longueurs, démontrés lors de la séance précédente, ne suffisent pas pour les engager dans la résolution du problème. La gestion de la classe choisie par l'enseignant dans ces conditions a fini par engager les élèves dans cette activité.

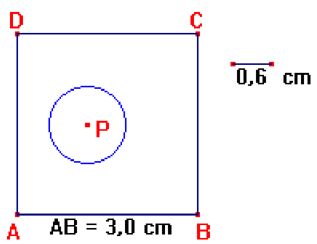
↳ **Deuxième moment de la séance : Activité C_1.**

L'enseignant a présenté le jeu de Franc-Carreau, en expliquant son origine (histoire) et la démarche pour jouer. Dans ce but, il a lancé une pièce sur une feuille de papier qu'il avait mise au sol pour expliquer cette démarche. Après avoir joué quelques coups, l'enseignant présente ce jeu dans l'environnement informatique.

> Prof : alors, on a simulé ce jeu la dans la calculatrice. (…) alors je veux vous dire comment on va jouer à ce jeu.

L'enseignant a distribué la fiche qui contenait la tâche 1, préparant la mise en œuvre du jeu de Franc-Carreau.

Soit le carré ABCD de côté 3,0 cm. Soit un cercle de centre P et rayon r = 0,6 cm, placé "au hasard" dans ce carré.
Tâche 1 : à quelle condition le disque est-il placé **entièrement à l'intérieur** du carré ? Dans ce cas, nous dirons que le cercle est à « franc-carreau ».



L'enseignant a donné les consignes pour que les élèves puissent ouvrir la figure dans la calculatrice, toujours par l'utilisation de sa propre machine, branchée sur le rétroprojecteur.

> Prof : alors, on a un carré ABCD. Dans ce carré, il y a un cercle. Ce cercle a ici un rayon de 0,6 cm et il est placé au hasard dans ce carré. Je peux prendre ce carré avec la petite main qu'on a vue tout à l'heure (…) Regardez le jeu qu'on a parlé tout à l'heure. Ici, par exemple, on a Franc-Carreau. (il joue quelques coups, en identifiant les résultats : ici on a franc-carreau, ici on n'a pas). Alors quelle est la question qu'on vous pose sur la fiche ?
>
> Élèves : ils lisent la fiche.

Prof : On regarde sur la fiche. À quelle condition le disque est placé entièrement à l'intérieur du carré ? Donc on vous demande les conditions pour que le disque soit franc-carreau. Vous pouvez manipuler votre dessin. Répondez à cette question. Vous essayez de trouver dans quelle condition le disque fait franc-carreau. Ici, il y a, ici il n'y a pas.

Les élèves ont commencé à travailler pendant que l'enseignant passait vers chaque binôme afin d'observer leur travail et de répondre à leurs questions. Nous avons remarqué une certaine difficulté de la part des élèves pour rédiger leur réponse, pour justifier en utilisant le langage courant les conditions géométriques pour placer le point P.

Le dialogue qui suit illustre comment l'enseignant a débloqué cette situation en ouvrant la possibilité de compléter ou remplacer leur discours par un dessin (langage symbolique lié à la géométrie, un élément du contrat didactique établi pour les cours de géométrie).

Prof : Regardez bien, hein. Comprenez bien qu'est-ce qu'il faut répondre sur la fiche. Ce qu'on vous demande, on vous demande à quel endroit le point P doit-il tomber pour que ce disque là ne touche pas un bord, ne sorte pas. Je vous rappelle que ça a 0,6 cm et ça a 3,0 cm. Alors, essayez sur la machine pour voir quand ça marche et quand ça marche pas.
Élève : et le tangent ?
Prof : si c'est tangent c'est bon.
Prof (en parlant à un élève précis) : est-ce que tu peux préciser, est-ce que tu peux tracer le lieu où ça marche ?
Élève : ah, sur le dessin ? bien sûr !
Prof (en parlant à la classe) : Si vous voulez, si vous voulez pour faciliter vos réponses, vous avez donné vos explications, vous pouvez sur la figure qui est en-dessous, hachurer la partie dans laquelle ça marche. Dans laquelle le point P doit se trouver.

La plupart des binômes ont développé leur stratégie pour délimiter les conditions dans lesquelles le point P doit être placé dans le carré en dessinant sur la figure donnée à l'énoncé, ainsi qu'en travaillant sur les mesures données.

Pendant la séance, il y a une pause de 10 minutes, avant laquelle l'enseignant ramasse les fiches. Le tableau contient les réponses écrites données par les binômes.

Tableau 26

binôme	réponse
Benjamin/Laurent	Pour que le disque soit « franc-carreau », il faut que le point P soit à au moins 0,7 cm des côtés du carré. Il faut que le cercle soit toujours au moins à 1 mm de plus que le rayon de ce cercle.
Anne/Morgane	Pour que le disque soit “franc-carreau”, il faut que son centre et son tour soient entièrement dans le carré sans toucher aucun des côtés. Le centre du disque doit être à 0,6 cm de chacun des côtés, il se déplace donc dans un carré de 2,4 cm de côté.
Maxime/Julien/Loïc	(ils dessinent sur la figure donnée par l'énoncé). Il faut que le centre P soit à l'intérieur du carré constitué des 4 droites parallèles au 4 côtés du carré (à l'intérieur de celui) et situé à 0,6 cm de ces côtés.
Guillaume/Frederic	(ils dessinent sur la figure donnée par l'énoncé). P doit être dans le carré de 1,8 cm de côté centré dans ABCD de sorte que P soit toujours éloigné de 0,6 cm des côtés de ABCD.
Jessica/Zybeydé	(ils dessinent sur la figure donnée par l'énoncé). La réponse est le dessin.

Nadège/Jessica	(ils dessinent sur la figure donnée par l'énoncé). Le point P ne doit pas toucher les côtés [DC], [CB] et [AB]. *Le côté [AD] n'est pas sorti sur le dessin fourni par l'énoncé à cause d'un problème lors de la reproduction des fiches.*
Célia/Romain/Eric	(ils dessinent sur la figure donnée par l'énoncé). Pour que le cercle de centre P soit à « franc-carreau » il faut que le point P soit au moins à 0,6 cm d'un des côtés du carré ABCD. 0,6 étant le rayon du cercle. La partie hachurée correspond à l'emplacement où doit se trouver le point P.
Florence/Elise	(ils dessinent sur la figure donnée par l'énoncé). Pour que le cercle soit à « franc-carreau » il faut que le point P soit à 0,6 cm ou plus du carré ABCD. Donc le point P doit rester dans le carré EFGH.
Fabien/Damien	(ils dessinent sur la figure donnée par l'énoncé). Pour qu'il y ait « franc-carreau », il faut que le point P se trouve à 0,6 cm à l'intérieur du carré ABCD.
Nicolas/Vincent	La condition pour que le disque soit entièrement placé à l'intérieur du carré est que le point P soit à plus de 0,6 cm des 4 côtés du carré à l'intérieur.
Amélie	(ils dessinent sur la figure donnée par l'énoncé).Il faut que le point P soit placé à 0,6 cm des côtés du carré. Le point P doit être placé dans un carré de 1,8 cm de côté à 0,6 cm des côtés du carré.
Audrey/Camille	(ils dessinent sur la figure donnée par l'énoncé). Le point P doit tomber à 0,6 cm des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
Alexia/Sabrina	(ils dessinent sur la figure donnée par l'énoncé). Le disque est entièrement à l'intérieur du carré si il ne sort pas sur les bords à 0,6 cm du bord. Pour que le cercle soit à « franc-carreau », le point P doit se trouver à l'intérieur ou sur les bords du carré hachuré.

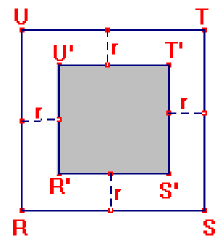


Figure 29

Les réponses des élèves et les dessins qu'ils ont fait dans la fiche indiquent qu'ils ont réussi à bien délimiter la région des positions possibles du point P, comme nous l'avons décrit dans l'analyse a priori : le carré R'S'T'U' dont les côtés mesurent (3,0 – 2 x 0,6) cm, selon la figure ci-contre. Nous pouvons dégager de la lecture du tableau que les élèves ont accepté la position « tangent » comme étant un succès, car ils ont considéré la position limite pour le centre à une distance de 0,6 cm des côtés du carré RSTU. Le fait de pouvoir exprimer leur réponse par un dessin à débloqué complètement les élèves : aucun élève n'est resté en échec. Les interventions de l'enseignant lors de la formulation de la question, en rappelant les mesures, ont peut-être mis quelques élèves en difficulté dans une situation de réponse par contrat :

> Prof : je vous rappelle que ça a 0,6 cm et ça a 3,0 cm. Alors essayez sur la machine pour voir quand ça marche et quand ça marche pas.

Nous chercherons à distinguer les réponses dues à la maîtrise de cette méthode « rapport d'aires » de celles qui sont dues à un effet de contrat lors de l'analyse des tâches suivantes de cette situation didactique.

Les élèves ont bien désigné le carré intérieur comme la région dans laquelle il fallait placer le point P pour avoir la position « franc-carreau ». Malgré cela, leurs réponses ne nous permettent pas de dire s'ils assimilent cette position à un succès lors de la réalisation d'une expérience aléatoire.

L'enseignant reprend le cours en faisant l'institutionnalisation du raisonnement géométrique pour la résolution de cette tâche en utilisant l'outil « Trace » pour illustrer la région dans laquelle le point P doit être placé pour obtenir la position «franc-carreau ». Ainsi, le carré R'S'T'U', domaine de validité pour la position «franc-carreau », est bien caractérisé par la position de ses côtés et leur mesure.

Après cette institutionnalisation, l'enseignant distribue la fiche que contient la deuxième tâche de cette activité C_1, que nous reproduisons ci-dessous.

Ce jeu a été proposé pour la première fois en 1733 par un naturaliste et mathématicien français, Georges-Louis Leclerc de Buffon, qui a été plus connu comme naturaliste. Il consiste à jeter un écu au-dessus d'un carrelage. Les joueurs parient sur la position finale : tombera-t-elle, cette pièce de monnaie, entièrement sur un seul carreau (franc-carreau), sur un joint entre deux carreaux, ou encore sur deux, trois ou quatre joints ? Considérons comme succès de cette expérience aléatoire «la pièce tombe à franc-carreau ». On construit le cercle de centre P et rayon 0,6 cm en utilisant la macro-construction X pour simuler ce jeu.

a) À l'aide de la calculatrice TI-92, déterminer la probabilité d'obtenir la position « franc-carreau ». Justifiez votre réponse.

Pour ouvrir la figure qui contient le compteur N :

a) appuyer sur la touche $\boxed{\text{F8}}$;

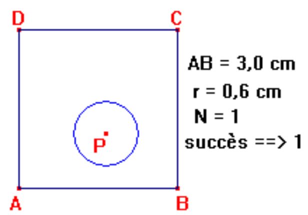
b) appuyer sur la touche $\boxed{\text{1 : Open}}$;

c) sur l'écran apparaît la boîte de dialogue

OPEN : folder → expe variable → cercle2

d) appuyer sur la touche $\boxed{\text{enter}}$.

Pour faire fonctionner la macro-construction X plusieurs fois il suffit de faire une animation sur le compteur N.



b) Pouvez-vous utiliser un calcul direct pour vérifier ces résultats expérimentaux ? Justifiez votre réponse.

Remarquons d'abord que l'énoncé demande explicitement l'utilisation des deux méthodes pour la détermination de la probabilité : la méthode expérimentale et le rapport d'aires. La formulation de la question (b) rend explicite la demande de validation des résultats expérimentaux par le calcul de rapport d'aires.

Les élèves ont commencé à manipuler la calculatrice avec un peu de difficulté, et le comptage des succès a toujours été fait par la perception visuelle. Cela a rendu très difficile l'indentification des résultats du type «le cercle est tangent à un des côtés du carré ABCD ».

Ce type de comptage a rendu les résultats plus imprécis du point de vue des élèves. Le dialogue d'un des binômes observés montre explicitement cette incertitude des élèves pour l'utilisation d'un tel résultat pour donner la probabilité demandée :

> Élève 1 : On est à combien la ? Moi j'ai compté cinq.
> Élève 2 : J'étais à six, mais tu as parlé en haute voix …euh…
> Élève 1 : Moi, je dis cinq par ce qu'il y en avait cinq à un moment et …

Les observations de la classe nous ont montré que l'usage du mot « probabilité » dans l'énoncé provoque un doute chez quelques élèves : ils avaient déjà les valeurs, mais ils ne comprenaient pas comment interpréter ces valeurs pour donner la probabilité demandée. Cela montre que la formulation que nous avons choisie n'a pas été suffisante pour devenir un élément de base pour permettre la liaison entre le champ d'expérience des élèves et le champ d'expérience mathématique (Boero, 1995). L'intervention de l'enseignant a débloqué complètement ces élèves, même si il présente un raccourci pour la conceptualisation de la pré-probabilité :

> Prof : la probabilité, c'est le rapport entre le nombre de succès et le nombre total d'essais.

Remarquons que cette définition informelle donnée par l'enseignant assimile la fréquence de succès à la probabilité de l'événement qui réalise le succès. Du fait que les élèves travaillent sur des simulations et qu'ils sont invités à faire un grand nombre d'essais, la stabilisation de cette fréquence autour de la valeur de la probabilité cherchée devient alors une donnée explicite du contexte. Par conséquent, elle n'est pas utilisé comme un estimateur de la probabilité, mais elle remplace complètement cette valeur.

Les élèves ont travaillé sur cette tâche pendant 20 minutes, et les résultats qu'ils ont produits sur les fiches ramassées avant la mise en commun seront analysés dans la suite.

Parmi les douze binômes dans le groupe, aucun d'entre eux n'a donné une valeur pour la probabilité demandée à partir des résultats obtenus par la mise en fonctionnement de la méthode expérimentale et l'analyse des fréquences. Onze binômes font quelques répétitions de l'expérience avec la calculatrice TI-92, remplissent un tableau avec les résultats de ces répétitions, mais n'arrivent pas à transformer ces résultats en une réponse à la question posée : quelle probabilité de faire « franc-carreau ». Dans leur stratégie pour la mise en fonctionnement de cette méthode, il manque quelques étapes comme le calcul des effectifs cumulés, calcul institutionnalisé au début de la séance lors de la reprise de l'activité B_2. Ces élèves utilisent la même étiquette introduite par cette activité, S et T, mais ils restent au niveau des effectifs obtenus à chaque groupe d'essais. Prenons par exemple le tableau construit par Florence et Elise :

n	T	S	Fn = S/T
1	29	7	24,1 %
2	18	10	55,5 %
3	12	7	58,3 %
4	80	28	62,2 %

Un autre binôme, Audrey et Camille, cumule les effectifs relatifs au nombre de succès obtenus, mais sans calculer aussi les effectifs cumulés pour le total d'essais, ce qui rend leur procédure incorrecte. Elles se sont bloquées à la fin de la construction du tableau qui présentait des pourcentages plus grands que 100 %. Même le résultat qu'elles ont obtenu pour le rapport d'aires n'a pas été utilisé pour invalider les résultats du tableau, encore que leur modèle de proportionnalité était un modèle additif : elles ont fait la soustraction entre les aires, donnant par conséquent un faux résultat (9 – 3,24 = 5,76).

Le binôme Jessica/Zubeydé a présenté le même type de raisonnement selon un modèle additif de la proportionnalité. Ainsi, leurs résultats expérimentaux exprimés à la fois sous la forme de fraction et sous la forme d'un pourcentage, n'a pas été validé. Ces élèves n'ont pas réussi à interpréter les valeurs qu'elles ont obtenues soit par la mise en fonctionnement de la simulation, soit par le calcul des aires.

Le trinôme Célia/Romain/Eric a fait les essais avec la calculatrice et ont écrit les rapports entre le nombre de succès et le nombre total d'essais pour chaque série de répétitions de l'expérience. Ces élèves ont été induits peut-être par l'intervention de l'enseignant lorsqu'il a donné une “définition” pour la probabilité.

Ils ont fait aussi un dessin à main levée pour indiquer les différentes régions dans le Cabri-dessin : la zone qu'ils ont appelée « zone franc-carreau » et la zone désignée par « zone possible ». Ces élèves n'ont pas associé les résultats expérimentaux ni les mesures présentées à l'écran de leur dessin et donc ils n'ont pas donné de valeur à la probabilité cherchée. Nous reproduisons ci-dessus la forme du dessin qu'ils ont produit dans leur fiche.

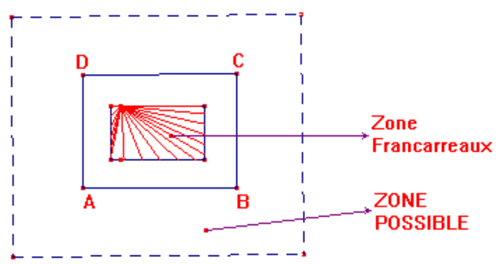


Figure 30

Nous pouvons alors faire l'hypothèse que ces élèves ont identifié le jeu de Franc-Carreau comme une expérience de Bernoulli, sans aboutir à le modéliser par une urne de Bernoulli, c'est-à-dire sans aboutir à la proportion de boules blanches dans une telle urne. Nous ne pouvons ainsi rien conclure sur leur assimilation entre le rapport d'aires, le rapport entre le nombre de succès et le nombre total d'essais et la pré-probabilité.

Pour l'item (b) de cette deuxième tâche, cinq binômes associent sans difficulté le calcul demandé à celui qui a été l'objet de la tâche 1, indiquant la valeur de 36 % obtenu par le rapport d'aires comme le résultat cherché. Parmi ces cinq binômes, celui qui est formé par Guillaume et Frederic n'essaie même pas de résoudre l'item (a), c'est-à-dire de faire les simulations sur la calculatrice. Ils écrivent sur leur fiche :

> Je n'ai pas fais la simulation, j'ai calculé directement.

Nous remarquons que pour ces élèves, ainsi que pour les quatre autres binômes qui ont résolu le problème par le calcul a priori du rapport d'aires, cette méthode est suffisante pour répondre à la question posée. Les résultats ainsi obtenus n'ont pas besoin d'être contrôlés par la méthode expérimentale et montrent que **ces élèves présentent un comportement qui nous conduit à conclure au lien entre rapport d'aires et pré-probabilité**. Ces binômes ont ainsi interprété ce jeu de Franc-Carreau comme une expérience de Bernoulli modélisable par une urne de Bernoulli contenant 36 % de boules blanches, tel que ces notions ont été introduites par la situation A de notre ingénierie. Autrement dit, nous dégageons de leurs réponses que ces élèves ont construit les concepts d'expérience aléatoire de Bernoulli et d'urne de Bernoulli de façon à pouvoir les mobiliser dans un autre contexte que celui dans lequel ils ont été présentés (hors environnement informatique). Nous faisons l'hypothèse que **le passage par le modèle d'urne de Bernoulli avant la proposition d'une valeur pour la probabilité est resté implicite**, selon le schéma ci-dessous.

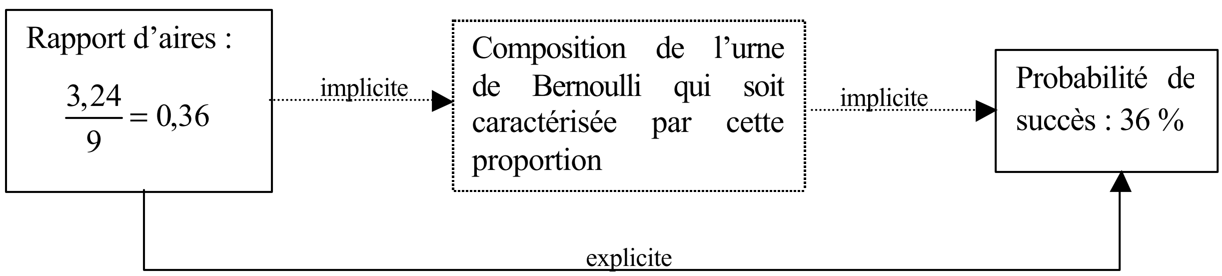


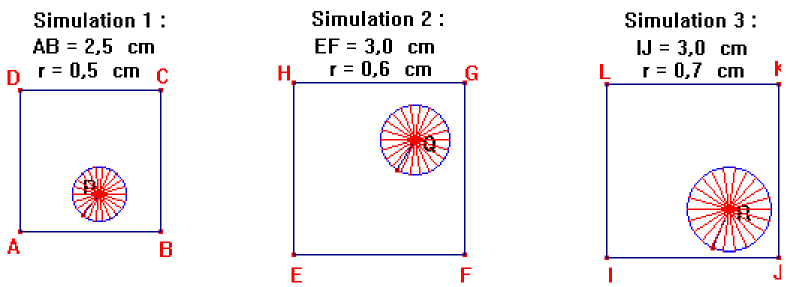
Schéma 21

Nous dégageons des solutions proposées à cette tâche par les élèves de cette classe l'impression qu'ils n'ont pas encore acquis le savoir-faire nécessaire pour la mise en fonctionnement de la méthode expérimentale. Les contenus faisant partie du programme de statistique des années précédentes ou les notions expérimentales introduites par les situations précédentes n'ont pas été mobilisés ni spontanément ni avec indication de l'enseignant, de façon à pouvoir être réinvestis dans ces activités.

Citons par exemple le calcul des effectifs et des fréquences cumulées, le besoin de réaliser un nombre suffisamment grand d'essais d'une expérience aléatoire pour obtenir une bonne analyse de fréquence et donc bien estimer les chances d'obtenir un succès. Nous observons que même l'intervention de l'enseignant lorsqu'il a "défini" la probabilité comme le rapport entre le nombre de succès et le nombre total d'essais, n'a pas été suffisante pour conduire les élèves vers l'interprétation des résultats expérimentaux. Remarquons que cette intervention, dans un premier moment, a débloqué les élèves tout au début de l'activité. Une question qui reste posé est : l'ingénierie est-elle inadaptée aux compétences acquises par ces élèves, ou les concepts en jeu leur sont trop étrangers ? Ou est-ce plutôt l'environnement matériel mal maîtrisé et l'énergie dépensée à son égard qui ont fait obstacle à la bonne compréhension des objectifs de ces activités ?

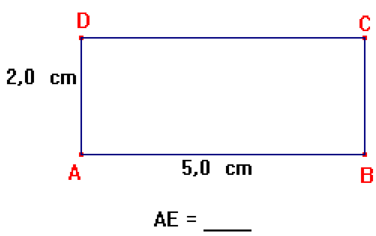
Après la mise en commun de la tâche 2, l'enseignant distribue les fiches de la dernière tâche de cette activité C_1, dont l'énoncé est présenté dans l'encadré ci-dessous.

Tâche 3 : On construit 3 simulations différentes du jeu avec un carré et en cercle dont les tailles sont différentes. Laquelle choisiriez-vous pour avoir plus de chances d'obtenir un succès. Justifiez votre réponse.



Dans la même fiche, l'activité présente déjà l'énoncé de la tâche 4 :

Tâche 4 : En utilisant la simulation que vous avez choisie, construisez une urne à pixels qui représente ce jeu.



Justifiez votre réponse :

Les énoncés de cette fiche sont complétés par un tableau (tableau 24) contenant les résultats de 998 essais de chacune des trois simulations proposées, ainsi que nous l'avons présenté dans l'analyse a priori :

Simulation 1 r = 0,5 cm et *l* = 2,5 cm			
n	**T**	**S**	**S/T**
1	50	19	38,0%
2	100	38	38,0%
3	150	58	38,7%
4	200	75	37,5%
5	250	93	37,2%
6	300	107	35,7%
7	350	131	37,4%
8	400	154	38,5%
9	450	172	38,2%
10	500	193	38,6%
11	550	205	37,3%
12	600	225	37,5%
13	650	237	36,5%
14	700	254	36,3%
15	750	272	36,3%
16	800	296	37,0%
17	850	316	37,2%
18	900	326	36,2%
19	950	345	36,3%
20	998	360	36,0%

Simulation 2 r = 0,6 cm et *l* = 3,0 cm			
n	**T**	**S**	**S/T**
1	50	21	42,0%
2	100	39	39,0%
3	150	57	38,0%
4	200	77	38,5%
5	250	92	36,8%
6	300	109	36,3%
7	350	132	37,7%
8	400	149	37,3%
9	450	165	36,7%
10	500	183	36,6%
11	550	204	37,1%
12	600	221	36,8%
13	650	239	36,8%
14	700	255	36,4%
15	750	273	36,4%
16	800	292	36,4%
17	850	313	36,5%
18	900	331	36,8%
19	950	349	36,7%
20	998	365	36,5%

Simulation 3 r = 0,7 cm et *l* = 3,0 cm			
n	**T**	**S**	**S/T**
1	50	13	26,0%
2	100	30	30,0%
3	150	41	27,3%
4	200	52	26,0%
5	250	68	27,2%
6	300	85	28,3%
7	350	101	28,9%
8	400	112	28,0%
9	450	125	27,8%
10	500	138	27,6%
11	550	153	27,8%
12	600	167	27,8%
13	650	179	27,5%
14	700	196	28,0%
15	750	212	28,3%
16	800	221	27,6%
17	850	236	27,8%
18	900	250	27,8%
19	950	264	27,8%
20	998	280	28,0%

L'analyse des productions des élèves nous conduit à classer leurs réponses selon quatre types de démarches. Remarquons d'abord qu'aucun binôme n'a utilisé le tableau ci-dessus pour construire sa stratégie. Les quatre démarches que nous avons pu identifier conduisent à des stratégies géométriques (méthode du calcul a priori) pour répondre à la question posée par la tâche 3. Avant de préciser les démarches, présentons d'abord le tableau contenant les réponses données par les binômes aux tâches 3 et 4 de cette activité.

Tableau 27

binômes	**Tâche 3**	**Tâche 4**
Benjamin/Laurent	En-dessous des deux premiers dessins : on garde ces deux la car la taille des rayons sont proportionnelles à la dimension des carrés. En-dessous du troisième dessin : on élimine déjà celui-la car le carré est pareille de celui du 2 et le cercle est plus gros.	Étant donné que nous avons approximativement trouvé qu'il y avait 40 % de réussite, nous mettons le rectangle hachuré à peu près à 40 % de la surface totale de ABCD. Sur le dessin, ils indiquent AE = 4 cm.

Anne/Morgane	On choisit la simulation 2 car, dans ce carré, le centre du cercle peut se déplacer dans un carré de 1,8 cm de côté et c'est le plus grand des trois simulations.	AE = 1,8 cm Dans la simulation 2 le pourcentage de succès est 36 %. Si AE = 1,8 cm alors dans ce rectangle le pourcentage de succès sera 36 %.
Maxime/Julien/Loï c	(ils calculent le rapport d'aires pour chacun des dessins et donnent la réponse en termes de pré-probabilité : % de chance) Leur réponse : il faut choisir la 1 ou la 2.	AE = 1,8 cm $\frac{36}{100} \rangle\langle \frac{1,8}{5}$
Guillaume/Frederic	Les 2 premiers car 0,5 x 5 = 2,5 et 0,6 x 5 = 3 donc dans ces 2 cas il y a 36 % de réussite.	AE = 1,8 car 1,8/5 = 36/100
Jessica/Zubeydé	Nous pensons que la simulation 2 car : HGEF = LKIJ et Q < R donc ce n'est pas la simulation 3. Pour la simulation 1 : DCAB < HGEF et P < Q mais P n'est pas beaucoup plus petit que Q.	NR
Nadèje/Jessica	On choisit la simulation 1. Comme le rayon du cercle P est petit, l'aire hachurée est plus petite aussi donc le milieu est plus grand. Donc, il y a plus de chance.	NR
Célia/Romain/Eric	La simulation 2 permet d'obtenir un maximum de succès car par rapport à la 3: les côtés des carrés sont égaux mais le r du cercle et plus grand donc il y a moins de chances de faire « franc-carreau ». Entre la 1 et la 2: les rayons sont presque égaux mais les côtés de la 1 est plus petit donc le cercle a moins de chance de faire « franc-carreau ».	NR
Florence/Elise	$\frac{0,6}{3} = \frac{20}{100}$ = 20 % On choisit la simulation 2 car le rectangle est grand alors que le cercle est plus petit que la simulation 3. Le cercle de la simulation 1 est plus petit mais comme re rectangle est plus petit aussi ça ne change rien.	$\frac{0,6}{5} = \frac{12}{100}$ AE = 12
Fabien/Damien	(ils calculent le rapport d'aires pour chacun des dessins et donnent la réponse en pourcentage). On choisi les simulations 1 et 2 car elles sont égales entre elles mais supérieures à la 3.	AE = 1,8 $\frac{5}{100} = \frac{x}{36}$ $x = \frac{5x36}{100}$ x = 1,8
Nicolas/Vincent	C'est HGFE car le cercle Q étant plus petit que le cercle R et que le carré HGEF est aussi plus grand que le carré LKIJ. Le cercle P est plus petit que les autres mais le carré est encore plus petit que les autres donc ça revient au même que LKIJ. ⇒ HGEF est le carré où on a plus de chances d'obtenir un succès.	AE = 2,0 cm (ils écrivent ça sur la valeur 1,8 écrite en premier. Pas de calculs sur la feuille).
Aurélie	(elle entoure le dessin de la simulation 1, dans lequel elle avait dessiné le carré intérieur). Parce que le rayon du cercle est plus petit et donc le carré qui peut contenir le cercle pour que cela fasse franc-carreau est plus grand.	NR

Audrey/Camille	C'est la simulation 2 qui permettra d'avoir le plus de succès car le rayon de Q est plus petit et l'aire du carré plus grande.	NR
Alexia/Sabrina	On a autant de chance avec les simulations 1 et 2. 1) 2,5 – 0,5 = 2 2 : 0,5 = $\boxed{4}$ 2) 3 – 0,6 = 2,4 2,4 : 0,6 = $\boxed{4}$ 1) DCBA = 6,25 petit = 4 2) HGFE = 9 petit = 5,76	(elles écrivent dans le rectangle : 64 % de chance) $\frac{4}{6,25} = \frac{64}{100}$ AE = 3,2 cm $\frac{5,76}{9} = \frac{64}{100}$ Avec les simulations 1 et 2 on a 64 % de chance de gagner.

Analysons alors les démarches que nous avons pu identifier.

- ✓ Démarche « rapport d'aires » : les élèves cherchent les éléments dans les trois dessins pour retrouver le carré intérieur et ainsi, retrouver la configuration introduite par la tâche 1 de cette activité. Cette configuration leur permet de calculer le rapport d'aires, dont le résultat est transformé en pré-probabilité, désignée dans leurs réponses comme la chance d'obtenir un succès. Ainsi, après avoir calculé le rapport d'aires pour chacun des trois dessins, les élèves donnent la réponse «36 % de chance de réussite » pour les simulations 1 et 2, celles qui ont été choisies. Nous avons trouvé ce type de démarche chez les élèves Maxime/Julien/Loïc et Fabien/Damien.

- ✓ Démarche « rapport de longueurs » [83] : les élèves cherchent les éléments dans les trois dessins pour retrouver la configuration introduite par l'activité B_1 (voir Chapitre V), ce qui leur permettra de calculer les rapports des longueurs. Dans cette démarche, les élèves ont choisi de mettre en rapport les longueurs du rayon du disque et du côté du carré. Nous constatons que l'activité B_1, proposée par la situation «Urne à Pixels », est devenue ainsi un obstacle à l'apprentissage de la notion de probabilité que nous envisageons. L'introduction de la proportionnalité entre aires et longueurs, particulière à la figure utilisée, a introduit un élément parasite que les élèves n'ont pas réussi à éliminer de façon spontanée par le changement de contextes. C'est-à-dire que les élèves n'ont pas reconnu la non-proportionnalité lorsqu'ils travaillent sur la figure qui représente le jeu de Franc-Carreau. Cet obstacle est dû à une mauvaise délimitation du domaine de fonctionnement [84] attaché au modèle théorique au sein duquel nous avons introduit la notion de

[83] Nous avons limité le domaine de fonctionnement de la probabilité géométrique aux situations où elle s'exprime par un rapport d'aires (cf. note 32, §2.1.2, Chapitre III). Cela n'a pas empêché certains élèves de transposer spontanément cette notion de probabilité géométrique à des rapports d'autres grandeurs, ici de longueurs.

[84] Nous nous rapportons ici au schéma 2, proposé par Laborde (1994a), que nous avons présenté au §3 du Chapitre I.

probabilité géométrique (la probabilité conçue comme rapport d'aires). Du fait que la situation B n'a pas été finalisée dans ce groupe (cf. §2 du Chapitre V), cet obstacle n'a pas pu être repéré et levé auparavant. Autrement dit, nous n'avons pas pu proposer des problèmes pour mettre en évidence les limitations du domaine de validité de cette démarche. Du fait que les figures proposées par cette tâche appartiennent à la catégorie de problèmes pour laquelle cette démarche est valide, les élèves n'ont pas eu de rétroaction du milieu effectif de la situation en cours pour se rendre compte de ces limitations. Cinq binômes parmi les treize ayant proposé une résolution pour cette tâche ont adopté cette démarche. Parmi ces cinq binômes, Alexia et Sabrina ont utilisé cette démarche, mais en restant dans le modèle additif de la proportionnalité. Remarquons que ces élèves n'avaient pas utilisé ce modèle dans les tâches précédentes. Citons les réponses données par les binômes qui ont développé leur stratégie selon cette démarche :

> Benjamin/Laurent : (en indiquant les deux premiers dessins) on garde ces deux-la car la taille des rayons sont proportionnelles à la dimension des carrés. (En indiquant le troisième dessin) on élimine déjà celui-là car le carré est pareil de celui du 2 et le cercle plus gros.
>
> Guillaume/Frederic : les deux premiers car 0,5 x 5 = 2,5 et 0,6 x 5 = 3 donc dans ces 2 cas il y a 36 % de réussite. (Nous faisons l'hypothèse, fondé sur leurs réponses et dialogues précédents, qu'ils évoquent l'exercice précédent lorsqu'ils utilisent la valeur 36 %).
>
> Célia/Romain/Eric : la simulation 2 permet d'obtenir un maximum de succès car par rapport à la 3, les côtés des carrés sont égaux mais le r du cercle est plus grand donc il y a moins de chances de faire « franc-carreau ». Entre la 1 et la 2, les rayons sont presque égaux mais les côtés de la 1 est plus petit donc le cercle a moins de chance de faire « franc-carreau ».
>
> Florence/Elise : On choisit la simulation 2 car le rectangle est grand alors que le cercle est plus petit que la simulation 3. Le cercle de la simulation 2 est plus petit mais comme le rectangle est plus petit aussi ça ne change rien.
>
> Alexia/Sabrina : On a autant de chance avec les simulations 1 et 2.

1) 2,5 – 0,5 = 2	2 : 0,5 = $\boxed{4}$
2) 3 – 0,6 = 2,4	2,4 : 0,6 = $\boxed{4}$
1) DCBA = 6,25	petit = 4
2) HGFE = 9	petit = 5,76

✓ Démarche « comparaison inter-figurale » : les élèves cherchent les éléments dans les trois dessins, mais sans chercher à calculer aucun type de rapport. Ils comparent les éléments de même type repérés dans chaque figure : les rayons de chaque disque, les côtés de chaque carré et les aires de chaque carré. Nous pouvons penser que ces élèves sont restés dans une appréhension perceptive de la figure, car ils restent dans une interprétation très globale qui s'en tient seulement à des constatations (Duval, 1994). Citons la réponse donnée par les trois binômes qui ont proposé ce type de démarche :

> Jessica/Zubeydé : Nous pensons que la simulation 2 car HGEF = LKIJ et Q < R donc ce n'est pas la simulation 3. Pour la simulation 1 : DCAB < HGEF et P < Q mais P n'est pas beaucoup plus petit que Q.
>
> Nicolas/Vincent : C'est HGFE car le cercle Q étant plus petit que le cercle R et que le carré HGFE est aussi plus grand que le carré LKIJ. Le cercle P est plus petit que les autres mais le carré est encore plus petit que les autres donc ça revient au même que LKIJ.
>
> Audrey/Camille : C'est la simulation 2 qui permettra d'avoir le plus de succès car le rayon de Q est plus petit et l'aire du carré plus grande.

Remarquons que la réponse donnée par le binôme Benjamin/Laurent, présentée dans la démarche « rapport de longueurs », constitue en effet une combinaison entre les deux démarches, « rapport de longueurs » et « comparaison inter-figurale ».

- ✓ Démarche « déplacement du disque » : les élèves déplacent mentalement les trois disques dans leurs respectifs carrés pour obtenir le carré intérieur. Ils comparent alors les dimensions (soit les côtés, soit l'aire) pour choisir le plus grand, sans chercher à le comparer avec le carré donné par le dessin. C'est-à-dire qu'ils comparent les grandeurs et pas les proportions. Cette démarche est une variation de la démarche précédente, « comparaison inter-figurale ». Regardons la différence entre les deux démarches. Pour la première, les éléments utilisés pour la comparaison sont déjà explicites dans la figure (le rayon, les côtés et l'aire du carré donné). Au contraire, pour la démarche « déplacement du disque », il leur faut expliciter d'abord les éléments comparables (les côtés et l'aire du carré intérieur). Citons les réponses données par les trois binômes qui ont suivi cette démarche « déplacement du disque » :

> Anne/Morgane : On choisit la simulation 2 car, dans le carré, le centre du cercle peut se déplacer dans un carré de 1,8 cm de côté et c'est le plus grand des trois simulations.
>
> Nadèje/Jessica : On choisit la simulation 1. Comme le rayon du cercle P est petit, l'aire hachurée est plus petite aussi donc le milieu est plus grand. Donc il y a plus de chance. (Dans leur dessin, elles indiquent le carré intérieur et hachurent la région comprise entre les deux carrés).
>
> Amélie : (elle entoure le dessin de la simulation 1, dans lequel elle avait dessiné le carré intérieur). Parce que le rayon du cercle est plus petit et donc le carré qui peut contenir le cercle pour que cela fasse franc-carreau est plus grand.

Tel que nous l'avons présentée dans l'analyse a priori, pour résoudre la dernière tâche de cette activité, les élèves doivent partir de l'urne de Bernoulli qu'ils ont composé. C'est-à-dire qu'ils doivent utiliser la proportion de succès qu'ils ont établi pour donner la position du segment [EF] selon la configuration d'urne à pixels, introduite par la situation précédente. Nous dégageons que les binômes qui ont utilisé la démarche « rapport d'aires » pour construire leur stratégie de résolution pour la tâche 3 ont bien réussi à placer le point E sur le segment [AB] de façon adéquate, soit AE = 1,8 cm. Pour trouver ce résultat ils ont mobilisé le produit en croix : $\frac{36}{100}=\frac{1{,}8}{5}$. Ils ont utilisé ainsi le rapport entre les longueurs AE et AB pour placer le point E. Le binôme Guillaume/Frederic a aussi produit une bonne réponse, en utilisant la même validation que nous venons d'indiquer : le produit en croix. Ces élèves avaient utilisé la démarche « rapport de longueurs » pour résoudre la tâche 3. Ils nous fournissent ainsi un exemple d'absence rétroaction du milieu qui ne prend pas en compte les limitations de cette démarche pour la catégorie de figures utilisée pour illustrer les simulations proposées.

Cinq binômes parmi les treize qui ont rendu les fiches n'ont pas résolu cette tâche. Du fait que leur fiche ne contient aucune réponse, nous ne pouvons pas savoir s'ils ont eu un blocage pour cette résolution, ou s'ils ont eu un problème de gestion du temps. Cette tâche a été proposée presque en fin de séance. Nous pouvons supposer un blocage à partir de l'analyse de leur réponse à la tâche 3 : ils n'ont pas attribué de valeur pour la probabilité d'obtenir « franc-carreau » dans les simulations proposées. Ils n'ont pas utilisé non plus le tableau avec les résultats expérimentaux, fourni par l'énoncé, pour essayer d'estimer cette valeur.

Un binôme a produit une réponse fausse, sans aucune indication de calcul, ce qui ne nous permet pas d'analyser la source de son erreur.

Deux autres binômes ont aussi produit une fausse réponse, mais leur calcul ne nous permet pas de dégager la source de leur erreur.

Le binôme Benjamin/Laurent nous a fourni un exemple de non-reconnaissance des rétroactions du milieu effectif de cette activité. Ils placent le point E à partir d'une estimation des chances de succès à 40 %. Ils indiquent alors AE = 4 cm, sans analyser l'ensemble de la figure résultante : si AB = 5 cm, alors cet emplacement représente plus de 50 % de [AB], ce qui n'est pas conforme aux chances qu'ils ont estimées.

Analysons les réponses des élèves du point de vue de la mobilisation de la pré-probabilité. Conformément à ce que nous avons présenté au Chapitre II, la pré-probabilité est la conception spontanée chez l'élève qui est mobilisée lors de la prise en compte du hasard quand il analyse le rapport qui caractérise une urne de Bernoulli. L'activité B_1 de la situation précédente a bien établi le lien entre le rapport d'aires [(85)] et le rapport de boules dans l'urne lors de la mise en œuvre du dispositif informatique « urne à pixels ».

Alors, l'association-en-acte chez l'élève entre le rapport d'aires et le choix *au hasard* d'un pixel est aussi une expression de la mobilisation de la pré-probabilité. Ainsi, par l'analyse des réponses à la tâche 3, nous reconnaissons ce type de mobilisation explicite chez cinq binômes pour aboutir à la comparaison demandée par l'énoncé. C'est-à-dire que ces cinq binômes associent explicitement le rapport d'aires entre le carré intérieur et le carré extérieur aux chances d'obtenir un succès. Citons leurs réponses :

> Maxime/Julien/Loïc : (ils calculent le rapport d'aires et donnent la réponse en termes de chances). Pour les simulations 1 et 2 on a 36 % de chances et pour la simulation 3 on a 28,4 % de chances.
>
> Nadèje/Jessica : Comme le rayon du cercle P est petit, l'aire hachurée est plus petite aussi donc le milieu est plus grand. Donc, il y a plus de chance.

[(85)] L'aire pouvant être exprimée soit par le comptage de pixels, soit par le calcul "longueur x largeur".

Célia/Romain/Eric : (…) les côtés des carrés sont égaux mais le r du cercle est plus grand donc il y a moins de chances de faire « franc-carreau ». (…) les rayons sont presque égaux mais les côtés de la 1 est plus petit donc le cercle a moins de chance de faire « franc-carreau ».

Nicolas/Vincent : C'est HGFE car le cercle Q étant plus petit que le cercle R et que le carré HGFE est aussi plus grand que le carré LKIJ. Le cercle P est plus petit que les autres mais le carré est encore plus petit que les autres donc ça revient au même que LKIJ. HGEF est le carré où on a plus de chances d'obtenir un succès.

Alexia/Sabrina : On a autant de chance avec les simulations 1 et 2. (elles font les calculs et indiquent : on a 64 % de chances).

Ainsi, l'analyse des réponses aux tâches qui constituent cette activité C_1 par les élèves de la classe de Troisième nous permet de supposer que la mobilisation de la pré-probabilité est une stratégie accessible. Encore que, pour quelques élèves, le niveau de conceptualisation de la proportion présente des erreurs de délimitation du domaine de validité. C'est-à-dire que quelques élèves utilisent un modèle aditif pour la proportionnalité.

<u>Deuxième Groupe : Classe de Seconde.</u>

La séance a commencé par l'explication donnée par l'enseignant à propos des activités que les élèves auront à faire. L'enseignant a envoyé l'image de son écran à tous les ordinateurs de la classe et ainsi, il a expliqué toutes les consignes pour la mise en œuvre du dispositif informatique prévu pour cette séance.

L'enseignant a expliqué alors l'origine et les règles du jeu de Franc-Carreau en utilisant une pièce de monnaie, qu'il a lancé au sol pour expliquer la démarche proposée par Buffon. Selon ces règles présentées à la classe par l'enseignant, les résultats possibles sont déjà classés en deux catégories, « succès » ou « échec », le joueur est gagnant si la pièce reste complètement dans un seul carreau.

Dans la suite, l'enseignant est revenu à son écran pour présenter le jeu de Franc-Carreau en utilisant le dispositif informatique constitué afin de simuler ce jeu. La simulation est introduite ainsi comme une boîte noire pour laquelle la tâche des élèves est d'identifier le modèle qui est attaché à cette simulation et qui se trouve caché par le fonctionnement du dispositif informatique. Remarquons que ce type d'introduction diffère de celui choisi par l'enseignant de la classe de Troisième qui présentait directement un jeu mis en fonctionnement dans un environnement informatique.

L'enseignant a présenté ensuite le jeu en utilisant la macro-construction «FC », qui place "au hasard" le centre d'un disque de rayon pré-établi dans le carré ABCD. L'enseignant a associé le disque à l'écu et le carré au carreau appartenant à un carrelage, en utilisant dans ses explications le mot « modèle » pour désigner le disque et le carré ABCD.

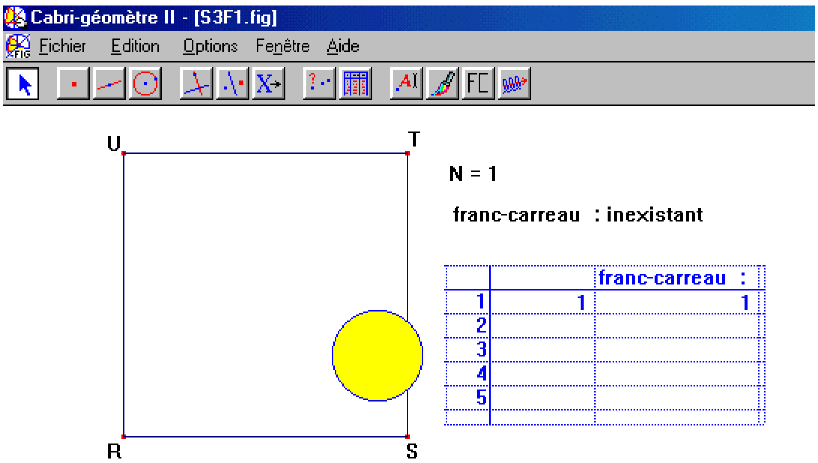
Dans le but de familiariser les élèves avec le jeu, il a réalisé quelques essais, en identifiant à chaque fois si le résultat a été un succès ou un échec.

Dans la suite, l'enseignant a évoqué la notion d'expérience aléatoire, en associant le jeu de Franc-Carreau à une expérience aléatoire par la présence de l'intervention du hasard.

Les élèves ont commencé à travailler sur les fiches que l'enseignant a distribuées après ses explications. Dans ces fiches, toutes les tâches qui composent les activités C_1 et C_2 sont déjà proposées à la fois dans l'objectif de laisser aux élèves la charge de choisir la démarche, et de faire la gestion du temps selon leurs besoins. Les élèves pouvaient alors regarder l'ensemble des activités avant de se lancer à la résolution de chacune entre elles.

L'enseignant intervient encore une fois en ce début de séance pour rappeler que les élèves n'ont pas à utiliser la macro-construction FC lors de leurs résolutions. Ils doivent utiliser l'animation du compteur N afin d'obtenir un très grand nombre de répétitions. L'enseignant évoque, dans son intervention, les activités menées dans la situation précédente, « Urne à Pixels », pour rappeler la démarche d'association entre Cabri-géomètre II et Excel afin d'obtenir le nombre de succès après chaque série de répétitions.

La fiche donnée aux élèves commence par donner des consignes pour ouvrir la barre d'outils S3, qui comportait la macro-construction FC et qui mettait en évidence l'icône pour activer l'outil « Animation ». Ensuite, les élèves devaient ouvrir la **figure S3F1**.



Le jeu de Franc-Carreau était alors présenté comme une expérience aléatoire pour laquelle le succès était « la pièce tombe à franc-carreau ». Ensuite, la fiche proposait le premier exercice :

Exercice 1 : Est-il possible de représenter ce jeu par une urne de Bernoulli ? Si oui, laquelle ? Si non, pourquoi ?

Remarquons que la proposition de cette tâche comme la première partie de cette activité vise l'engagement de l'élève dans la démarche de modélisation introduite par les deux situations précédentes dans cette ingénierie didactique. Ainsi, cette tâche vise à introduire l'activité C_2, dans laquelle l'élève doit estimer les chances d'obtenir un succès dans différentes configurations du jeu de Franc-Carreau. Contrairement à l'énoncé proposé pour la classe de Troisième, ceux de l'activité C_1 ont pour objectif d'éviter la possibilité de l'utilisation d'un raccourci algorithmique pour résoudre le problème de détermination d'une probabilité. La question explicite de justifier la possibilité ou l'impossibilité de représenter le jeu de Franc-Carreau par une urne de Bernoulli oblige l'élève à chercher les éléments permettant d'identifier ce jeu à une expérience de Bernoulli. Ensuite, la mobilisation de la pré-probabilité conduit l'élève à la solution du problème proposé.

Revenons au déroulement de l'activité, en faisant l'analyse des productions des élèves. Quelques binômes sont restés bloqués par la formulation de l'énoncé, « quelle urne de Bernoulli ». L'enseignant intervient après 15 minutes de travail collectif pour expliquer la question :

> Prof : Il y en a beaucoup qui posent la question « pourquoi il faut dire quelle urne de Bernoulli ». Dans une urne de Bernoulli, finalement, qu'est-ce qu'il faut savoir ? Il y a des caractéristiques et, en particulier, les caractéristiques sur les chances de trouver quelque chose.

Cette intervention avait pour objectif d'engager les élèves vers l'utilisation de l'urne de Bernoulli comme moyen d'expliciter les chances d'obtenir la position « franc-carreau » lors de la mise en fonctionnement du dispositif informatique qui simulait le jeu. Autrement dit, les élèves devaient s'engager dans la recherche du modèle implicite qui était attaché à la simulation qu'ils voyaient à l'écran.

Les élèves ont travaillé pendant à peu près 20 minutes sur la résolution de cet exercice. Les réponses produites sont présentées par le tableau ci-dessous :

Tableau 28

Binôme	Réponses
Jérémy/Etienne	Oui, puisque le hasard intervient dans ce cas-ci, avec une urne à pixels. Dans cette urne de Bernoulli, nous avons 50 % de chance d'avoir un succès.
Nathalie/Anna	Oui, on peut représenter ce jeu par une Urne de Bernoulli. Si l'écu tombe dans le carré, c'est un succès. Le nombre de chances de succès augmente avec l'aire de UTRS qui augmente, et celle de l'écu qui diminue. Le pourcentage de succès est 48,40 %. Il y a 483 succès sur 998 tirages.

Thomas/Isabelle	Oui, une urne à pixels est le même principe. On a fait 101 tirages et on a eu 50 succès. La fréquence est de 49,50 %. C'est comme si dans une Urne de Bernoulli il y avait 101 boules au total et 50 boules rouges et il y a 49,5 % de chance de tomber sur une boule rouge.
Cyrielle/Claire/Marylène	Oui, elles sont toutes basées sur le même système. Total d'essais = 279, il y a 126 succès sur ce total. Fréquence = 45,16 %
Myriam/Camille/Caroline	Oui, il est possible de représenter ce jeu par une Urne de Bernoulli parce que les chances de succès dépendent de l'aire du carré (26/40). Dans ce cas-là, on peut calculer le pourcentage de franc-carreau qui est de $\left(\frac{25 \text{x} 100}{53}\right)$47,17 %. On a donc 47,17 % de chances d'avoir un franc-carreau.
Olivier/Djamel	Oui, le rayon du disque représentant les billes rouges si celui-ci tombe dans l'aire du carré. Plus son rayon est petit, plus il y aura de chances d'avoir des succès. Total d'essais : 998 Total de succès : 476 Fréquence : 47,70 %
Hana/Anaï s	Il est possible de représenter ce jeu par une Urne de Bernoulli. En effet, le nombre de perles total dans l'urne représente le nombre d'essais et les perles rouges, succès, sont les pièces qui tombent à franc-carreau. Il y a 998 essais et 478 succès pour le jeu de Franc-Carreau. Donc 998 perles dans l'urne et 478 perles rouges tirées au hasard.
Gregory/Cyril	Oui, c'est possible. L'urne de Bernoulli. Cela dépend de l'aire du carré et de celui de la pièce. Fréquence : 44,32 % Aire cercle centre P = 44,32 % de l'aire de UTSR. 84 essais.
Mélissande/Gaëlle	Tout dépend du lanceur. S'il est habile, il a plus de chances de réussites. Mais on peut, par exemple, calculer le pourcentage des réussites d'un même joueur, avec un même carreau, et une même pièce (pour leur taille) Urne De Bernoulli { boules rouges → succès (dans le carreau) ; boules différentes → à côté du carreau ou sur les bords du carreau Ex. : sur 1000 essais, la pièce est tombée 490 fois dans le carreau. Il y a 49 % de réussite.
Bénédicte/Rose	Oui, on peut représenter ce jeu par une Urne de Bernoulli car l'écu est comme une bille rouge quand il fait franc-carreau et est comme une bille bleue il tombe sur un joint. Sur 1000 essais, il y a 479 succès soit 48 %.
Julien/Kévin	Oui, c'est représentable par une urne de Bernoulli. Comme dans les autres cas, la chance d'avoir un succès : $\frac{\text{aire de succès*}}{\text{aire totale}} = \frac{\text{nbre de succès}}{\text{nbre total}} = \frac{478}{998}$ *Aire de succès = (UR – diamètre de l'écu) x (RS – diamètre de l'écu). C'est l'urne à pixels.
Mélanie/Christelle	Oui. C'est une urne de Bernoulli de 100 boules au total, avec 52 boules rouges (succès).
Camille/Julie	Oui, le nombre de boules rouges correspond au nombre de fois où l'écu est tombé dans un carreau et le nombre de boules bleues correspond à celui où l'écu est tombé sur le joint. Total essai : 500 succès : 224 fréquence : 44,80 %

Stéphanie/Emilie/Yaël	Oui. L'urne à pixels car RSTU correspond à AEFD. L'extérieur du carré RSTU est égal à EFCB. 998 essais et nous avons obtenu 477 succès. L'urne de Bernoulli sert à : Ex : on parie 998 F, on a 477 F de succès. Il vaut mieux gagner le nombre d'échecs car il est supérieur.

La lecture de ce tableau nous permet de constater que tous les binômes ont accepté de représenter ce jeu de Franc-Carreau par une urne de Bernoulli. Les élèves ont développé deux types de démarches pour donner une composition d'une telle urne :

a) Le calcul a priori d'un rapport entre des éléments intra-figuraux, encore que les dimensions attachées à ces éléments n'étaient pas disponibles sur le Cabri-dessin que les élèves avaient à l'écran. Autrement dit, le calcul de ce rapport reste seulement imaginé.
   - a.1) Rayon du disque/aire du carré RSTU ;
   - a.2) Aire du disque/aire du carré RSTU ;
   - a.3) Aire du carré intérieur à RSTU/aire du carré RSTU.

b) L'estimation d'une composition approximative par l'analyse des fréquences obtenues expérimentalement. Cette estimation est explicitée sous la forme d'un pourcentage.

c) L'estimation d'une composition précise par l'assimilation cardinaliste entre les résultats expérimentaux (nombre d'essais et nombre de succès) et le nombre de boules dans l'urne.

La mobilisation de la pré-probabilité, quand elle a eu lieu, a été un moyen de justifier la composition de l'urne donnée ou un moyen de justifier l'utilisation de l'urne de Bernoulli pour modéliser le jeu. Nous pouvons alors conclure que cette mobilisation chez l'élève est un critère de validité, au sens de Margolinas (1993).

Cette mobilisation est rendue publique par :

a) L'association entre un calcul a priori évoqué et les chances d'obtenir un succès. Le calcul évoqué est celui que nous venons d'indiquer pour la composition de l'urne de Bernoulli :
   - a.1) Rayon du disque/aire du carré RSTU ;
   - a.2) Aire du disque/aire du carré RSTU ;
   - a.3) Aire du carré intérieur à RSTU/aire du carré RSTU.

b) L'association entre les effectifs donnés comme composition de l'urne de Bernoulli et les chances d'obtenir un succès ;

c) La fréquence de succès, exprimée sous la forme d'un pourcentage, et les chances d'obtenir un succès.

Le tableau ci-dessous illustre l'analyse des réponses écrites de chaque binôme selon les démarches et la mobilisation de la pré-probabilité que nous venons de présenter.

Tableau 29

Binôme	**Composition de l'urne de Bernoulli**					**Mobilisation de la pré-probabilité**					**Autres**
	Évocation calcul a priori			**Analyse des fréq. (en %)**	**Assimilation entre effectifs et boules dans l'urne**	**Évocation calcul a priori**			**Analyse des fréq. (en %)**	**Assimilation entre effectifs et boules dans l'urne**	
	A1	**A2**	**A3**			**A1**	**A2**	**A3**			
Jérémy/Etienne											X
Nathalie/Anna				X	X		X				
Thomas/Isabelle					X				X	X	
Cyrielle/Claire/Marylène											X
Myriam/Camille/Caroline				X				X			
Olivier/Djamel					X	X					
Hana/Anaï s					X						
Gregory/Cyril		X		X							X
Mélissande/Gaëlle				X	X						
Bénédicte/Rose				X	X						
Julien/Kévin					X			X		X	
Mélanie/Christelle				X							
Camille/Julie					X						
Stéphanie/Emilie/Yaël					X						

Nous dégageons ainsi que cinq binômes parmi les quatorze qui proposent une réponse pour cette tâche mobilisent spontanément la pré-probabilité selon la démarche que nous avons présentée plus haut.

Pour mieux analyser quelques résultats mis en évidence ci-dessus, revenons au premier tableau. Remarquons d'abord que quatre binômes associent explicitement le jeu de Franc-Carreau à l'urne à pixels comme une justificative de la modélisation.

La justification présentée par Jérémy/Étienne indique que ces élèves présentent le biais d'équiprobabilité : dans l'absence d'indication des dimensions de la figure, ils estiment à 50 % les chances d'obtenir un succès, sans essayer de faire appel à la simulation disponible à l'écran.

La réponse donnée par les élèves Myriam, Camille et Caroline indique que la démarche de modélisation n'est pas un savoir-faire acquis chez elles. Leur raisonnement pour la composition de l'urne et pour la mobilisation de la pré-probabilité est valide, mais les valeurs qu'elles utilisent pour construire ce raisonnement sont fausses. De plus elles n'indiquent pas la source de ces valeurs.

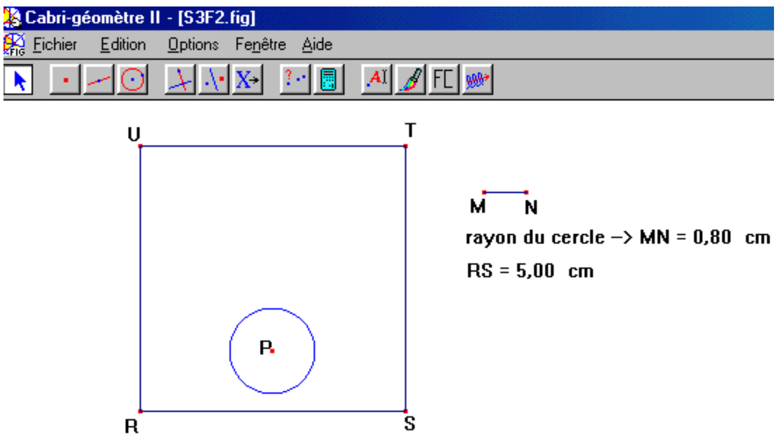
Le binôme Gregory/Cyril associe la composition de l'urne au rapport d'aires du type (a.2), indiqué plus haut. En conséquence de l'absence de mesures, ils ne formulent pas cette composition. Ils ont essayé d'estimer ces mesures par une démarche expérimentale : ils ont obtenu 44,32 % de succès, d'où ils ont conclu que l'aire du disque représente 44,32 % de l'aire du carré UTSR. Mais la formulation de la composition de l'urne sous la forme d'une association entre ces résultats et le rapport de boules dans cette urne n'est toujours pas explicitée.

Les élèves Melissande et Gaëlle montrent dans leur réponse une maîtrise de la notion d'expérience aléatoire lorsqu'elles précisent les conditions pour la mise en œuvre de l'expérimentation. Seulement après cette explicitation, ces élèves proposent une solution au problème de donner la composition de l'urne de Bernoulli. Leur réponse montre qu'elles associent les chances d'obtenir un succès à l'habilité du lanceur, dans un raisonnement plutôt déterministe qui ne permet pas la mobilisation de la pré-probabilité.

La réponse donnée par Stéphanie/Emilie/Yaël indique qu'ils proposent une composition de l'urne de Bernoulli plutôt comme un effet de contrat : ils ont mis en œuvre la simulation car elle était induite par le contexte (l'écran du dispositif informatique). L'exemple qu'ils ont fourni a montré qu'ils n'ont pas encore acquis la notion d'urne de Bernoulli, même au niveau le plus faible de mobilisation, le niveau technique.

La suite de cette fiche demande aux élèves d'ouvrir une nouvelle figure dans Cabri-géomètre II avant proposer le deuxième exercice de cette activité C_1.

Dans Cabri, ouvrez la figure S3F2. Vous pouvez déplacer le point P pour explorer la situation.



Remarquons que l'énoncé indique le point P comme un point libre de la figure, mais l'élève peut aussi explorer la modification du rayon du disque par la modification du segment [MN], ou encore la modification des dimensions du carré.

Exercice 2 : en considérant les mesures données à l'écran, quelle urne de Bernoulli proposeriez-vous pour représenter ce jeu ? Justifiez votre réponse.
Nombre total de boules : _____ Nombre de boules blanches : ____
Justification :

Quelle est l'urne à pixels équivalente ? (Nommez les point et placez [EF], en indiquant les mesures et les calculs).

Coup de pouce : Dans quelles conditions géométriques le disque est-il placé entièrement à l'intérieur du carré ?

Les dimensions du rectangle proposé par l'énoncé sont 6,0 cm et 3,0 cm. Ces mesures n'étaient pas explicites, mais les élèves pouvaient les obtenir par l'usage de leur règle.

Remarquons d'abord que l'énoncé de cet exercice propose implicitement un conflit de modèle : la comparaison entre l'urne proposée à l'exercice 1, pour laquelle la seule méthode pour donner une composition était la méthode expérimentale, et la composition d'une urne à partir d'un calcul a priori. Dans la suite, il associe aussi explicitement le jeu de Franc-Carreau proposé à l'écran au dispositif « urne à pixels », introduit par la situation B.

La demande de donner la composition de l'urne de Bernoulli par le nombre total de boules et le nombre de boules blanches peut induire une démarche fondée sur les effectifs à la place d'une démarche fondée sur le rapport qui caractérise cette urne. Nous envisageons de dégager des éléments qui nous permettront de distinguer ces deux types de démarches. Citons par exemple le nombre total de boules. Si l'élève indique 100 boules dans le total, cela peut signifier qu'il a utilisé le rapport entre les boules blanches et le total de boules, en utilisant comme registre les pourcentages. Au contraire, si l'élève indique 25 boules dans le total, cela peut signifier qu'il a utilisé un raisonnement fondé sur les effectifs, car 25 cm² est la mesure de l'aire du carré RSTU.

Pour analyser les réponses des élèves, nous avons dégagé quatre étapes qui doivent composer leur stratégie pour résoudre au problème posé par cet exercice :

1) Délimitation des éléments intra-figuraux (la région « succès ») ;

2) Passage au numérique pour le calcul du rapport d'aires et, par conséquent, pour la détermination de la composition de l'urne de Bernoulli ;
3) Interprétation du résultat obtenu à l'item précédent en termes d'explicitation de la composition de l'urne de Bernoulli ;
4) Réinvestissement de la composition proposée à l'item précédent pour la délimitation de la région « succès » dans la configuration de l'urne à pixels.

Tableau 30

Binôme	Réponses			
	1)	2)	3) T : total B : blanches	4)
Jérémy/Etienne (1)	Il faut que le centre du cercle tombe dans un carré interne à UTSR et les sommets de ce nouveau carré doivent être chacun à égal distance des sommets de UTSR.	Ils font deux essais : a) 5 – 0,8 b) 5 – 1,6. Ils gardent le deuxième essai. 3,4² = 11,56 100 ÷ 2,16 = 46,24 %	46,24 % de succès. (pas de nombre de boules)	Après quelques en utilisant les valeurs 5 et 0,8, ils arrivent à estimer 84 % de succès et annulent la réponse.
Nathalie/Anna (2)	Le point P doit se trouver à plus de 0,80 cm du bord. La zone hachurée est la zone où les points P peuvent se trouver pour que ce soit un succès. (elles font aussi un dessin, avec la région « succès » hachurée).	11,36 = 3,4 x 3,4 25 x 4 = 100 11,56 x 4 = 46,24	T : 100 B : 46,24	ABCD = 18cm² 100 ÷ 18 ≈ 5,5 5,5 x 46,24 = 256 AE ≈ 2,5
Thomas/Isabelle (3)	Il faut que le point P soit à 0,80 cm de chaque bord du carré. Puisque le cercle tombe à l'intérieur du carré RUST, il faut que le point P du cercle tombe dans un carré de 17,64 cm² que se situa à 0,80 cm de chaque côté à l'intérieur du carré UTSR.	5 – 0,8 = 4,20 4,20² = 17,64	NR	5/0,8 = 6,25 100/6,25 = 16 soit 16 % de pas de succès. 100 – 16 = 84 % de succès. (sur le dessin, ils indiquent la longueur 5 et placent le segment à 0,8 cm du bord)
Cyrielle/Claire/Marylène (4)	Pour avoir un succès, le bord doit être dans le carré. Donc le point P doit être à 0,80 cm du bord du carré minimum car le rayon du cercle est de 0,80.	5 – (0,8 x 2) = 3,4 5 x 5 = 25 cm² 3,4 x 3,4 = 11,56 cm²	T : 998 B : 495 49,60 % le nombre de chances est proportionnel donc : 11,56 / 25	NR

Myriam/Camille/Caroline (5)	Aire du carré dans lequel la boule blanche fera franc-carreau : 11,56 cm² Aire du carré dans lequel la boule blanche ne fera pas franc-carreau : 32 cm² Aire de la boule blanche : $\pi r^2 = 2{,}51$ À partir de ces résultats, on calcule le pourcentage de chances d'avoir un franc-carreau : $\frac{11{,}56\text{x}100}{43{,}56} = 26{,}54\%$		T : 10000 B : 2654	(6,1 x 2,6) : 100 = 1,5. (elles tracent le segment à 1,5 cm du bord).
Olivier/Djamel (6)	NR	5 - 0,8 x 2 = 3,4 $A_{carré} = 11{,}56$ 11,56 x 100 : 25 = 46,24	T : 100 B : 46	(ils marquent sur le dessin 6,1 cm et tracent le segment à 1,2 cm du bord).
Hana/Anaï s (7)	(elles utilisent la trace du point P pour délimiter à l'écran la région « succès »). Si P est à l'intérieur du carré rouge, c'est un succès. Le carré RSTU est l'urne complète et le carré rouge est le nombre de boules blanches, donc des succès.	$[5 - (2 \text{ x } 0{,}8)]^2 = 11{,}56$ cm² 25 x 900 = 22 500 11,56 x 900 = 10 404	T : 22500 B : 10404	ABCD = 6 x 3 = 18 cm² Pixels : 16200 Pixels ADEF : 7490,88 Aire AEFD : 8,32 cm² Soit x la longueur : 3x = 8,32 x ≈ 2,77 cm
Gregory/Cyril (8)	(dessin à main levée, indiquant le carré intérieur à 0,8 cm des bords du carré RSTU)	$\frac{16}{25} = \frac{4}{5} = 0{,}64$ donc 64 % (en stylo, avec une autre écriture : 5 – 2 x 0,8 = 3,4 $3{,}4^2 = 11{,}56$ ils barrent le 16 de la fraction pour mettre 11,56.	T : 100 B : 70	Indiquent la valeur 5 sur les côtés du rectangle et tracent le segment [EF] indiquant 3,2 cm du bord.
Mélissande/Gaëlle (9)	Aire du carré : $5^2 = 25$ cm² Aire du disque : $\pi r^2 \approx 2{,}01$ cm² Aire du 2^{nd} carré (ou peut tomber P) : 11,56 cm² (elles passent aux pixels, mais abandonnent les résultats) 25 x 4 = 100 11,56 x 4 = 46,24 On a 46,24 % de chances de tomber dans le petit carré.		T : 100 B : 46	6,1 x 46/100 = 2,8 cm EF = 2,8 cm (elles hachurent la région « succès » dans le rectangle).
Bénédicte/Rose (10)	Sur 25 cm², 11,56 cm² est la surface dans laquelle le point P doit se trouver pour avoir un succès. On enlève de 25 cm², 0,8 cm de chaque côté. On enlève 13,44 cm²		T : 25 B : 11,56	(elles dessinent un rectangle ABCD à l'extérieur du rectangle donné, côtés parallèles.) Dans EFGH les pixels sont les succès. Dans ABCD hors EFGH les pixels sont les échecs.

Julien/Kévin (11)	(ils dessinent à main levée le carré, en indiquant le carré intérieur et la valeur 0,8 entre chaque côté des deux carrés). Il s'agit de l'urne à pixels car les résultats ont un rapport le rapport des aires. Aire de succès/ aire totale $\frac{(5-2x0{,}8)^2}{5x5} = 0{,}46$ $\frac{478}{998} = 0{,}48$ Ces deux résultats sont semblables, cela justifie notre formule.	T : 998 B : 478	(ils indiquent sur le rectangle la « zone de succès »). $\frac{2{,}92}{6{,}1} : \frac{478}{998}$
Mélanie/Christelle (12)	Elles dessinent à main levée le carré RSTU en hachurant le carré intérieur ABCD UTSR = 25 cm² ABCD = 11,56 cm² Chance = $\frac{11{,}56}{25} = 0{,}4624$	T : 25 B : 11,56	Elles tracent le segment [EF] dans le rectangle. P T 11,56 25 ? 6
Camille/Julie (13)	Pour que l'on ai un succès il faut que P se trouve à 0,8 cm du bord de RSTU. Cela nous donne un carré de 11,56 cm² pour trouver le nombre de chances que P tombe dans le petit carré. Il faut faire $\frac{\text{aire petit carré}}{\text{aire RSTU}} = \frac{11{,}56}{25} = 0{,}46 = 46\%$	T : 100 B : 46	6 x 46/100 = 2,76 (elles tracent le segment [EF] dans le rectangle).
Stéphanie/Emilie/Yaël (14)	comme le rayon du cercle MN = 0,80 cm donc le nombre de succès possibles dans le carré RSTU donc 5 – 1,6 = 3,40. Donc l'aire du carré diminué est 3,40 x 3,40 = 11,56 cm². On peut encore la comparer à urne de Bernoulli car le petit carré est dans le grand carré donc comparable AEFD. RSTU est comparable à EFBC. Proportion : $\frac{\text{aire carré rouge (petit)}}{\text{aire carré RSTU}} = \frac{11{,}56}{25} = 0{,}4624$	T : 2500 B : 1156	Ils ne dessinent rien sur le rectangle. Aire du rectangle : 18 cm² Avec 8,32 succès. Aire du carré 25 cm² avec 11,56 succès.

Les réponses au tableau nous indiquent que la plupart des binômes ont bien entamé une démarche de modélisation, en explicitant la région « succès » pour, ensuite, faire les calculs qui seront interprétés comme la composition de l'urne de Bernoulli cherchée. Les valeurs indiquées comme le total de boules dans l'urne et le total de boules blanches nous ont permis de classer les réponses selon le tableau ci-dessous. Les chiffres dans les cellules indiquent le binôme qui a produit un tel type de réponse.

Tableau 31

	Explicitation de la composition de l'urne de Bernoulli		
	effectifs	**proportion**	**NR**
Rapport d'aires	2, 7, 10, 12	2, 5, 6, 8, 9, 13, 14	1 et 3
Expérimentation	4 et 11	11	

La lecture de ce tableau nous indique que les réponses du type « effectifs » et du type

« proportion » sont à peu près reparties parmi le total de réponses obtenues. Cela ne nous permet pas de conclure sur le rapport entre le niveau de conceptualisation de l'urne de Bernoulli chez les élèves et la façon selon laquelle ils composent cette urne. La seule indication que nous pouvons dégager est que les élèves ont effectivement entamé une démarche de modélisation selon les quatre étapes que nous avons présenté avant le tableau des réponses des élèves.

Remarquons encore que :

- ✓ Nathalie et Anna (2) expriment la composition de leur urne de Bernoulli en utilisant le pourcentage calculé par le rapport d'aires, mais en gardant une valeur non entière pour exprimer le nombre de boules blanches. Cela place leur réponse à la fois comme étant du type « effectif » et du type « proportion ».
- ✓ Miriam, Camille et Caroline (5) ont construit leur raisonnement selon un modèle additif de la proportionnalité ;
- ✓ Hana et Anaï s (7) ont construit leur raisonnement en calculant les aires et en exprimant la composition de l'urne de Bernoulli selon le nombre de pixels qui tapissent chacun des carrés. Elles explicitent l'association entre le contexte géométrique (la configuration « franc-carreau », présentée plus loin dans cette analyse) et leur représentation pseudo-concrète de l'urne de Bernoulli.
- ✓ Julien et Kévin (11) valident leurs résultats par la comparaison entre les pourcentages obtenus selon les deux méthodes, expérimentale et rapport d'aires. Cela nous permet de faire l'hypothèse selon laquelle ces élèves ont fait la comparaison entre les deux urnes de Bernoulli qu'ils ont obtenues par les deux méthodes.
- ✓ Six binômes parmi les quatorze qui ont répondu à cette fiche évoquent la pré-probabilité pendant leur démarche, lorsqu'ils interprètent les calculs pour composer leur urne de Bernoulli.

La résolution à la question qui demande aux élèves de placer un segment dans le rectangle donné a été assez problématique pour eux. Nous avons dégagé deux démarches indiquant le type de réinvestissement de la notion d'urne de Bernoulli utilisé dans leurs stratégies :

- ✓ Les élèves utilisent les résultats précédents (les aires, le rapport ou la composition donnée de l'urne de Bernoulli) pour reconstituer dans le rectangle la configuration de l'urne à pixels qui a été introduite par la situation B. (onze binômes sur quatorze).

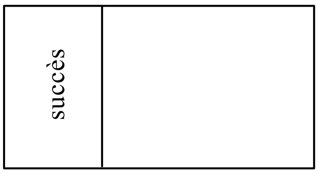


Figure 31

✓ Les élèves utilisent les résultats précédents, mais le rectangle est pris comme base pour reconstituer la configuration « franc-carreau ». (deux binômes sur quatorze).

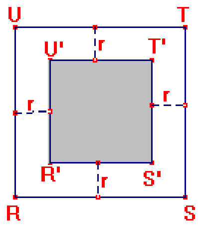


Figure 32

✓ Les élèves ne produisent pas de réponse. (un binôme).

§2.1.3. Conclusion de l'analyse a posteriori de l'activité C_1

L'analyse des productions des élèves lors du déroulement de cette activité montre que la démarche de modélisation dans un contexte géométrique est accessible aux élèves des deux groupes. Le choix de la méthode pour déterminer la composition de l'urne de Bernoulli qui modélise le jeu de Franc-Carreau proposé est lié à l'artefact informatique utilisé : TI-92 ou ordinateur. Nous avons pu remarquer que, du fait que l'usage de l'ordinateur a été beaucoup moins coûteux, les élèves de la classe de Seconde ont utilisé davantage la méthode expérimentale, contrairement aux élèves de la classe de Troisième. Par contre, l'explicitation de la composition de cette urne pour les deux groupes ne montre pas un comportement en rapport avec l'environnement ou avec la méthode : les deux groupes présentent un nombre relativement important d'élèves qui expriment leur composition en utilisant des effectifs (le total d'essais, dans la méthode expérimentale ou l'aire totale dans la méthode rapport d'aires).

Remarquons que les élèves ne mobilisent pas les propriétés de la proportionnalité, en restant dans un travail avec des nombres entiers. Cela peut provoquer des comportements analogues à ceux identifiés par Cañizares (1997), cité au paragraphe 4.3.1, Chapitre II, lors de la comparaison proposée par l'activité C_2.

Nous attendons que l'analyse de la deuxième activité qui constitue cette situation, l'activité C_2, puisse nous conduire à des précisions à propos du niveau de conceptualisation et du niveau de mobilisation de la notion d'urne de Bernoulli. C'est-à-dire que nous attendons cette activité pour compléter les indices pour répondre aux questions que nous avons posé au début de cette analyse a posteriori.

§2.2. Activité C_2 : le jeu du triangle

§2.2.1. Les questions auxquelles nous voulons répondre

Nous reprenons dans cette analyse les mêmes questions posées au paragraphe 2.1.1 de ce chapitre :

1) Dans quelles conditions didactiques, les élèves mettent en fonctionnement les deux méthodes [(86)] introduites par les situations précédentes comme stratégies principales de résolution, ou comme outils de validation, lorsqu'ils sont en train de résoudre les tâches proposées ici ?
2) Les élèves traduisent-ils spontanément un rapport d'aires en termes de pré-probabilité, conformément à ce que nous avons supposé au paragraphe 3 du Chapitre III, lors de la constitution du dispositif « urne à pixels » ?

§2.2.2. Le déroulement effectif de l'activité

Premier Groupe : Classe de Troisième

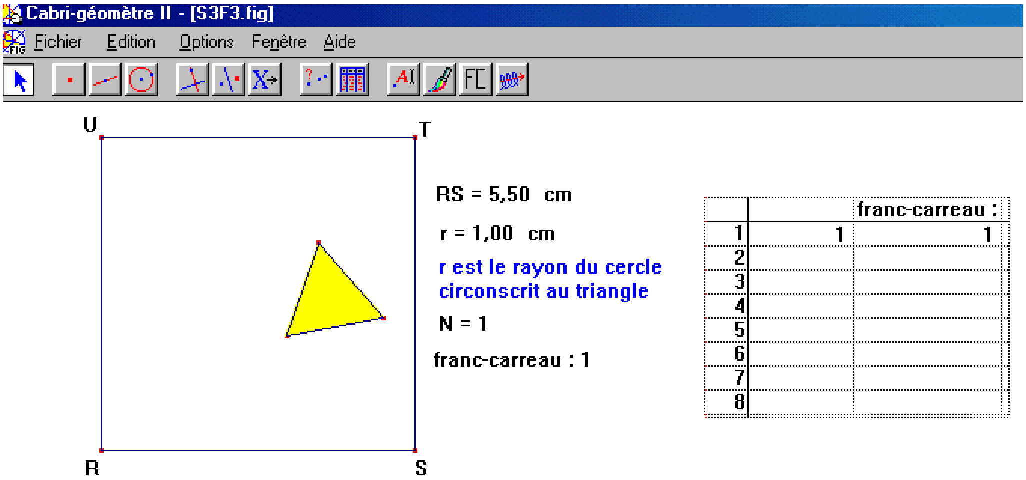
Cette activité n'a pas été proposée pour la classe de Troisième à cause des contraintes de temps. Du fait que ces élèves ont eu l'exercice de choisir un jeu de Franc-Carreau parmi trois jeux proposés dans la fiche, nous nous servirons de ces résultats pour conclure notre analyse globale de cette activité.

Deuxième Groupe : Classe de Seconde

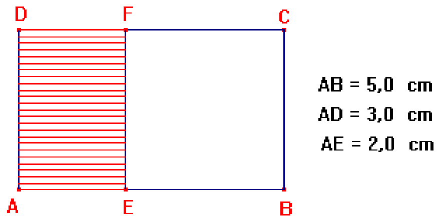
Dans la suite du jeu de Franc-Carreau, l'enseignant propose aux élèves la résolution du jeu du triangle, formulé selon l'encadré ci-dessous.

[(86)] La méthode expérimentale par l'analyse des fréquences et la méthode du calcul a priori du rapport d'aires.

Dans Cabri, ouvrez la figure S3F3.
Les élèves auront à l'écran le Cabri-dessin ci-dessous.



Considérons le jeu de Franc-Carreau. Nous voulons remplacer, dans ce jeu, l'écu par une plaque triangulaire (triangle équilatéral). Quel jeu choisiriez-vous pour avoir plus de chances de faire « franc-carreau » : celui avec le triangle qui est présenté à l'écran, celui avec le disque présenté par l'exercice précédent, ou encore l'urne à pixels ci-dessous ? Justifiez votre réponse.



Justification :

Les réponses données par les élèves sur les fiches sont présentées par le tableau ci-dessous.

Tableau 32

Binôme	Réponses
Jérémy/Etienne (1)	Dans le jeu « Franc-Carreau » et dans le jeu avec le cercle nous avons autant de chance de faire un succès (presque 50 % pour les deux). Sur le 3e exercice nous avons trouvé 84 % de succès ; Dans le dernier exercice si le rectangle noir est celui où il doit tomber les chances de succès nous avons 40 %. Soit le 3e exercice est plus intéressant.
Nathalie/Anna (2)	5 x 3 = 15 ; 2 x 3 = 6 ; 15 x 6,6 ≈ 100 ; 6 x 6,6 ≈ 39,6. La fréquence de chance est de 39,6. La fréquence de chance avec le triangle est de 47,24 % soit 94 succès sur 200 tirages. Nous choisirons, pour avoir le plus de chances de faire « franc-carreau » celui avec le triangle car sa fréquence de succès est de 47,24 % alors que celle de l'urne à pixels est de 39,6 % et celle du disque est de 46,24 %.
Thomas/Isabelle (3)	Nb de tirage : 998 Nb de succès : 489 Fréquence : 49 %
Cyrielle/Claire/Marylène (4)	NR

Myriam/Camille/Caroline (5)	Leur réponse est produite à l'issue d'une erreur de perception des dimensions du dessin : elles prennent AB = 7 cm (2 cm + 5 cm). $100 \text{x} \frac{2}{7} = 29\% = \text{urne à pixels (2)}$ $100 \text{ x } \frac{2654}{10000} = 27\% = \text{disque (3)}$ $100\text{x } \frac{249}{501} = 50\% = \text{triangle (1)}$ Donc, c'est le triangle qui a le plus de chance ; ensuite c'est l'urne à pixels et puis le disque.
Olivier/Djamel (6)	Le meilleur jeu pour avoir plus de succès est celui du jeu avec le disque. Disque : (5 – 0,8)² x 100 : 25 = 70,56 % Triangle : (ils effacent leur résolution, mais laissent le résultat obtenu) 10,38 % Pixels :3 x 2 = 6 / 6 x 100 : 25 = 24 % Ils écrivent dans un encadré : triangle : 3,5² = 12,25 cm² 12,25 x 100 : 30,25 = 40,50 disque : 46,24 %
Hana/Anaï s (7)	Nombre d'essais : 998 Nombre de succès : 483 Urne de Bernoulli : 48,40 % Dans l'urne à pixels : aire ADEF = 6 cm² ou 5400 pixels Aire ABCD = 15 cm² ou 13500 pixels On choisirait plutôt le franc-carreau avec le triangle car la surface de chance de réussite est supérieure à celle de l'urne à pixels.
Gregory/Cyril (8)	Expérience avec le triangle : 57,14 % de réussite (total d'essais 49 ; total de succès 28). Avec le cercle : 44,32 % (ils utilisent les valeurs de l'exercice 1 de l'activité C_1) Avec l'urne à pixels : rapport 15/6 = 2,5 soit 25 % de réussite. Donc, c'est l'expérience avec le triangle qui présente le plus de chances de réussite.
Mélissande/Gaëlle (9)	Première réponse : Après avoir fait l'essai avec l'urne ci-dessus, on a constaté qu'il y avait 48,51 de réussite. Sur 101 essais, on a 49 succès. On a plus de chances de réussites avec le triangle, car quand il tourne sur lui-même, ses sommets sont à des endroits différents, c'est-à-dire, on a un autre triangle, tandis qu'avec un cercle gardera la même disposition. Deuxième réponse : On a pratiquement le même nombre de chances dans les 3 cas car les aires des 2 rectangles ne changent pas (seulement lorsque la distance du point P au sommet du triangle est égale à la distance du rayon du disque).
Bénédicte/Rose (10)	$\frac{2}{7} = 0{,}2857$ $\frac{479}{1001} = 0{,}4785$ je choisirais le jeu avec le triangle. $\frac{454}{901} = 0{,}5039$ On a moins de chance de gagner avec l'urne à pixels puis avec le disque de l'exercice 2 puis c'est avec le triangle qu'on a le plus de chance de succès.
Julien/Kévin (11)	Les résultats avec le triangle : 502/998 = 50,3 % Les résultats avec le cercle : 478/998 = 48 % Les résultats probables avec l'urne à pixels : AE/AB = 2/5 = 40 % Le jeu avec lequel on a le plus de chance de gagner est le « franc-carreau » avec le triangle, car il a le taux de succès le plus élevé (50,3 %).

Mélanie/Christelle (12)	Proportion avec le disque : 11,56/25 = 0,4624. Proportion avec l'urne à pixels : 2/3 = 0,66 Proportion avec le triangle : 257/502 = 0,51 La proportion la plus importante est celle avec l'urne à pixels donc c'est avec ce jeu que nous aurons le plus de chance de faire « franc-carreau ».
Camille/Julie (13)	NR
Stéphanie/Emilie/Yaël (14)	NR

Signalons que trois binômes n'ont pas fourni de réponse à cette activité et le binôme Thomas/Isabelle a simplement réalisé l'animation du compteur et ensuite, il a fait la lecture des résultats disponibles sur Excel.

Les dix autres binômes ont réalisé la démarche de comparaison entre les pourcentages pour choisir le jeu qui donne le plus de chances d'obtenir un succès. Le corpus que nous avons constitué (productions écrites et dialogues) ne nous permet pas de dégager l'existence d'une démarche de modélisation explicite dans leurs réponses. Lors des justifications des réponses, les élèves n'ont pas fait appel explicitement au fait que les trois jeux ne deviennent comparables que par leur modélisation par une urne de Bernoulli : on compare alors les pré-probabilités attachées à ces urnes. Le seule observable dans les réponses que nous avons pu recueillir est la comparaison des fréquences, démarche identique à celle des élèves de la classe de Troisième lors de la résolution du dernier exercice de l'activité C_1 : le choix entre les trois simulations de franc-carreau).

Le dispositif informatique offre les mesures, mais il ne rend pas disponible le déplacement du triangle, comme pour le disque de l'activité précédente. Par contre, les outils pour la simulation étaient complètement disponibles. Du fait que ce groupe n'a pas eu les difficultés de manipulation de ce dispositif, nous pouvons supposer que quelques élèves ont entamé la démarche expérimentale par un effet de contrat.

Dans la suite, nous présentons l'analyse de quelques réponses que nous pensons pouvoir apporter des éléments significatifs pour notre travail.

- ✓ Le binôme Olivier/Djamel a essayé d'utiliser la démarche « rapport d'aires » pour déterminer les chances de succès pour le jeu du triangle. Ce binôme a essayé de rendre les trois jeux comparables par l'usage d'une même méthode pour déterminer les chances de succès.
- ✓ Myriam, Camille et Caroline utilisent la composition de l'urne de Bernoulli qu'elles ont proposé lors de l'activité précédente pour donner les chances de faire franc-carreau avec le disque. Pour l'urne à pixels, elles ont utilisé le rapport d'aires et finalement, pour le

triangle, elles ont mis en œuvre la méthode expérimentale par la réalisation de la simulation offerte à l'écran. Du fait qu'elles utilisent explicitement l'expression « le plus de chances » lorsqu'elles analysent les résultats obtenus, nous dégageons la mobilisation de la pré-probabilité. Nous pouvons donc supposer que leur réponse pourrait être issue d'une démarche de modélisation.

- ✓ Hana et Anaïs explicitent leur démarche de modélisation par l'explicitation de la proportion dans l'urne de Bernoulli qui modélise le jeu du triangle : 48,40 %. Remarquons que dans leur réponse, la comparaison est faite selon un raisonnement géométrique (surface de chance), même si la méthode utilisée pour le jeu du triangle était la méthode expérimentale.
- ✓ Julien et Kevin utilisent le rapport d'aires pour prévoir les résultats expérimentaux. Cela indique que pour ces élèves, il y a une équivalence entre les deux méthodes, « expérimentale » et « rapport d'aires ». Par contre, les observables ne nous permettent pas de savoir si ces élèves ont bien fait la distinction entre « **estimer** les chances par l'analyse des fréquences » et « **déterminer** les chances par l'analyse des fréquences ». Cette acceptation de l'équivalence entre les méthodes a été déjà mobilisée par ces élèves lors de l'exercice précédent, pendant la mise en œuvre de leur démarche de modélisation. Nous pouvons alors supposer que, même si dans leur réponse à cet exercice, ils comparent les pourcentages pour choisir le jeu, il y a une démarche de modélisation implicite dans leur réponse.

§3. Conclusion de l'analyse de la situation didactique « Franc-Carreau »

Pour bien dégager les points pertinents de la mise en place de cette situation didactique, revenons aux objectifs principaux présentés au début de ce chapitre :

- ➩ Conduire les élèves à l'utilisation de la démarche de modélisation d'une situation de la réalité par le modèle d'urne de Bernoulli, démarche introduite par les deux situations précédentes, A et B ;
- ➩ Élargir la notion d'urne à pixels, chez les élèves, par un changement de la figure présentée à l'interface du dispositif informatique ;
- ➩ Mettre en fonctionnement le modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli et sa réification par l'urne à pixels pour résoudre un problème d'estimation d'une probabilité.

Nous avons pu dégager de la mise en place de cette situation didactique que la démarche de modélisation introduite par les deux situations précédentes est accessible aux élèves qui ont participé à notre ingénierie didactique. Nous avons pu constater quelques difficultés, mais celles-ci ont été davantage liées aux formulations choisies pour les tâches plutôt qu'à l'ensemble des compétences et des connaissances préalables nécessaires à cette mise en place.

Les élèves appartenant au deuxième groupe, la classe de Seconde, ont montré de façon plus claire la démarche d'élargissement de la notion d'urne à pixels : nous avons pu observer l'existence de deux démarches, ainsi que nous l'avons présenté dans l'analyse a posteriori. Ainsi, nous avons constaté que la reconfiguration de l'urne à pixels, en passant d'un rectangle partagé à deux carrés de même centre n'est pas trop coûteuse pour ces élèves. Nous n'avons pas observé les mêmes démarches de reconfiguration pour les élèves de la classe de Troisième à cause des contraintes de manipulation de la TI-92. Nous avons constaté que ces élèves ont assimilé déjà la configuration des carrés comme une urne à pixels, sans revenir à la configuration avec le rectangle. De plus, les élèves de la classe de Troisième n'ont pas trop mobilisé explicitement l'urne à pixels car ils ont utilisé davantage la méthode « rapport d'aires », et donc une démarche plutôt menée hors environnement informatique. Le dispositif informatique a été pour eux, plus précisément, une illustration du jeu, sans revêtir une caractérisation de simulation informatique proprement dite.

Par rapport au troisième objectif, la mise en fonctionnement du modèle pseudo-concret de l'urne de Bernoulli, nous avons constaté l'existence d'un raccourci chez les élèves. Lorsque nous avons proposée la tâche de déterminer les chances d'avoir la position «franc-carreau» dans trois jeux, comme la demande de modélisation n'était pas explicitée par l'énoncé, les élèves ont fait appel à des raccourcis. Ainsi, soit pour la comparaison entre les trois jeux de franc-carreau (classe de Troisième), soit pour la comparaison entre le franc-carreau, le triangle et l'urne à pixels, les élèves n'avaient pas nécessairement à mobiliser l'urne de Bernoulli : ils ont comparé des éléments inter-figuraux, ou intra-figuraux, ou encore des fréquences obtenues expérimentalement.

Les avantages de proposer un choix entre des jeux utilisant différents objets géométriques sont liés aux stratégies qui peuvent être mises en fonctionnement. Nous avons constaté qu'aucun élève de la classe de Seconde a fondé son choix sur des comparaisons non pertinentes entre des éléments intra ou inter figuraux. Autrement dit, aucun élève n'a fondé son choix sur la comparaison entre le rayon du disque et les dimensions du triangle, ou encore sur la comparaison entre le rapport rayon/côté pour le disque et pour le triangle. Nous avons observé l'usage de ce raccourci chez les élèves de la classe de Troisième.

Même si les élèves de la classe de Seconde ont utilisé un raccourci consistant à comparer les fréquences, le déroulement des situations précédentes nous autorise à supposer que cette procédure a été construite au sein d'un apprentissage. C'est-à-dire que nous supposons que les élèves ont raccourci la démarche de modélisation par une procédure plus simple et plus immédiate pour eux. Le risque attaché à ce raccourci est l'assimilation entre fréquence et pré-probabilité : les élèves risquent donc de définir les chances d'obtenir un succès comme la fréquence de succès obtenue expérimentalement. Il nous a semblé manquer alors, parmi les activités que nous avons proposées au sein de notre ingénierie, une formulation suffisante pour engager effectivement les élèves dans une démarche de modélisation autonome et spontanée. Cette démarche ayant pour objectif d'**estimer** une probabilité géométrique par la mobilisation de la pré-probabilité.

CONCLUSION

Notre recherche s'est inscrite dans un contexte d'évolution des programmes de Mathématiques, en France et au Brésil, qui convergent vers de nouveaux objectifs curriculaires communs à plusieurs pays. L'introduction de la notion de probabilité par l'observation de la stabilisation de fréquences, nouveauté essentielle des programmes français des années 90, a débouché sur un enseignement de la statistique et des probabilités par une approche expérimentale. Telle est l'approche qui constitue l'essentiel des programmes des années 2000.

Dans ce travail, nous n'avons pas envisagé un enseignement formel du calcul des probabilités, procédant par définitions, d'axiomes et de théorèmes. Dans des situations aléatoires simples (situations de Bernoulli), nous proposons de développer cet apprentissage au travers de la maîtrise d'un processus de modélisation. Dans cette démarche, nous avons mis en évidence l'intérêt de la description de telles situations en termes de modèle pseudo-concret : le modèle d'urne de Bernoulli.

Se pose alors la question des conditions didactiques dans lesquelles les élèves peuvent se familiariser avec ces situations aléatoires en contexte scolaire et s'engager dans une appréhension en termes de modèle de telles situations dès le Collège. L'idée de base, telle que nous l'avons présentée dans l'introduction de cette thèse, est que l'on peut travailler sur l'aléatoire assez tôt en Collège. En effet, plus on attend, plus certaines conceptions spontanées se manifestent sous la forme de biais, comme par exemple le biais d'équiprobabilité, résistent à l'enseignement et se renforcent avec l'âge (Fischbein, 1996). Dans notre étude, lors de cette familiarisation avec l'aléatoire, nous avons proposé quelles pourraient être les étapes de cette modélisation dans laquelle les élèves peuvent s'engager de façon autonome, spontanément ou à la demande. Ils peuvent ainsi décrire une expérience aléatoire qu'ils sont réellement en train de réaliser, dégager les effets du hasard, délimiter les éléments pertinents d'un point de vue probabiliste et, finalement, interpréter cette expérience en termes de modèle d'urne de Bernoulli. L'importance didactique du choix d'un tel modèle vient du fait qu'il est l'outil de référence et potentiellement porteur de la plupart des lois de probabilités susceptibles de modéliser les situations rencontrées dans les études statistiques.

Nous voulions aussi étudier ce que l'environnement de géométrie dynamique Cabri-géomètre II peut apporter aux possibilités de simulation d'une expérience aléatoire présentée dans un contexte géométrique. Dans un tel environnement, les actions possibles sont, par exemple :

- ✓ déplacements et déformations de la figure de base représentée à l'écran par un Cabri-dessin ;
- ✓ actions de l'élève sur les paramètres du modèle sous-jacent ;
- ✓ expérimentation à grande échelle permettant de faire concrètement le lien entre probabilité a priori (ou pré-probabilité, selon la notion que nous avons introduite pour mieux cerner les enjeux didactiques de cette approche) et les fréquences observées sur une longue série d'épreuves.

Un retour sur la problématique et sur le cadre théorique

Délimitation du contexte

Au Chapitre I nous avons mené une brève étude sur les diverses appréhensions du hasard, qui débouche sur un schéma mettant en évidence une délimitation didactiquement nécessaire de contexte pour un premier contact avec l'aléatoire en Collège : **présenter un contexte avec des situations reproductibles dans lesquelles on peut repérer l'intervention du hasard, situations que nous avons désignées par « situations aléatoires »**.

Nous avons montré qu'il peut être important, d'un point de vue didactique, que ces situations aléatoires puissent être ramenées à un prélèvement *au hasard* dans une population donnée, c'est-à-dire avec équiprobabilité des objets dans cette population. Ce contexte permet en effet de donner un sens précis à l'idée de répétition d'une même expérience aléatoire.

Dans cette perspective, nous avons eu besoin de préciser, de ce point de vue didactique, le sens que nous avons donné à quelques notions probabilistes de base. Au Chapitre II, nous avons introduit un vocabulaire précis pour caractériser notre cadre théorique :

- ➩ **Domaine pseudo-concret** : domaine dans lequel on utilise les noms des objets de la réalité pour désigner des objets abstraits, idéalisés, théoriques, cristallisant en eux les propriétés probabilistes : un dé idéal a rigoureusement 1 chance sur 6 de tomber sur une face donnée. Nous avions fait l'hypothèse que, sur le plan didactique, la transition entre l'observation d'une réalité aléatoire et sa compréhension théorique suppose l'explicitation des situations observées en termes pseudo-concrets. Nous avons pu constater dans l'observation des élèves que ces derniers résolvaient les problèmes proposés en se plaçant dans le domaine pseudo-concret. Nous en concluons que l'introduction d'un modèle pseudo-concret s'avère opératoire pour les élèves.

- **Expérience aléatoire** : l'interprétation pseudo-concrète d'une expérience de la réalité qui doit pouvoir être décrite par l'explicitation de ses caractéristiques pertinentes pour la modélisation. C'est la mise en œuvre de la notion de **protocole expérimental** comme la description opératoire de cette expérience, en permettant sa reproduction dans ce qui pourra être considéré comme les "mêmes conditions". La notion de protocole n'est pas nouvelle pour les élèves, car elle est déjà utilisée en principe par les Sciences Expérimentales, comme nous l'avons dit au Chapitre II. À des fins didactiques, nous avons transposé ce concept dans notre domaine des Mathématiques comme un outil de base pour la caractérisation d'une expérience aléatoire en termes pseudo-concrets. Il permet de clarifier la signification du mot « aléatoire », de bien repérer l'intervention du hasard dans le processus expérimental et, finalement, de décrire de manière opératoire des gestes permettant la reproductibilité de cette expérience dans les "mêmes conditions". Nous précisions ainsi le sens donné à la notion de **reproductibilité d'une expérience aléatoire**.

- **Urne de Bernoulli** : modèle pseudo-concret de référence qui servira à représenter abstraitement une expérience aléatoire à deux issues possibles, succès ou échec. Nous avons montré que la représentation d'une situation aléatoire de Bernoulli est accessible aux élèves en Collège parce que cette représentation peut être formulée avec les termes qui désignent des éléments de la réalité. Dans un deuxième niveau d'apprentissage, ce modèle pseudo-concret pourra être traduit en termes formels, dans un vocabulaire propre au cadre probabiliste et donc plus complexe que celui alors utilisé. Du fait que l'urne de Bernoulli devrait être le résultat d'une abstraction faite par les élèves, nous avons introduit la notion d'**expérience de référence**. C'est une expérience concrète, assimilée par les élèves comme **expérience étalon** dont le but est de renvoyer clairement au concept d'urne de Bernoulli. L'analyse a posteriori a montré que l'utilisation d'un tirage *au hasard* dans un pot rempli de perles bleues et de perles rouges, ou d'un pixel dans une région délimité à l'écran, peut fournir des expériences efficaces pour jouer le rôle d'expérience étalon. L'association entre les éléments de la population et les perles dans un premier moment, et ensuite, entre les perles et les pixels qui tapissent le Cabri-dessin, forment les trois sommets du triangle épistémologique qui constitue le concept d'urne de Bernoulli. Nous avons montré que l'abstraction de tels signes vers le concept est une association-en-acte présente chez les élèves, et qui est donc construite dans la séquence didactique organisée.

- **Pré-probabilité** : connaissance-en-acte, chez les élèves, par laquelle ils associent la proportion de boules dans l'urne de Bernoulli aux chances d'obtenir un succès lors d'un tirage *au hasard* dans cette urne. Nous avons montré que la pré-probabilité peut aussi s'exprimer par un rapport d'aires lors d'un travail dans un contexte informatique de géométrie dynamique, au moyen de la discrétisation des surfaces : l'aire étant interprétée comme le comptage des pixels qui tapissent une région délimitée à l'écran.

La démarche de modélisation proposée

Nous avons été conduits à la proposition d'une démarche de modélisation contenant les étapes nécessaires pour que les élèves puissent, à partir de l'observation d'une situation aléatoire de la réalité, aboutir à sa représentation par une urne de Bernoulli. Cette démarche a été présentée par le schéma proposé au Chapitre III, et nous avons montré que les étapes qui y sont proposées sont accessibles aux élèves dès le Collège : les connaissances nécessaires sont déjà acquises à ce niveau de leur scolarité.

La mise en place d'une telle démarche a montré la nécessité à la fois épistémologique et didactique de prendre en compte la dualité des approches de la notion de probabilité : il fallait donner aux élèves des éléments pour la constitution et pour le contrôle de la composition d'une urne de Bernoulli modélisant la situation en jeu. Nous avons alors choisi de **placer les élèves dans un contexte dans lequel il faut prendre en compte la dualité d'approches de la notion de probabilité afin d'aboutir à la solution envisagée pour le problème posé.**

Les propositions de limitation du contexte, précision de vocabulaire et de prise en compte de la dualité de l'approche de la notion de probabilité ont été guidées par l'hypothèse de recherche principale de notre thèse : « **la double démarche d'expérimentation et de modélisation permet aux élèves au niveau du Collège d'acquérir des outils de représentation et d'interprétation des phénomènes aléatoires, allant jusqu'à l'estimation d'une pré-probabilité** ». Dans ces conditions, nous avons construit une ingénierie didactique dont l'objectif était d'apporter des éclairages aux questions qui guident cette recherche. En particulier, d'apporter des éclairages sur les effets de la mise en place d'un dispositif expérimental conçu selon les délimitations du contexte et de vocabulaire et selon la démarche expérimentale suggérée par notre hypothèse de recherche.

Les apports de l'expérimentation

L'ingénierie didactique que nous avons mise en place a été constituée par trois situations didactiques dont les activités s'enchaînaient de façon à faire évoluer le contexte dans lequel les élèves étaient placés. Nous avons proposé les activités à une classe de Troisième, pendant le mois de mars de l'année scolaire 1998-1999, ainsi qu'à une classe de Seconde, pendant le mois de septembre de l'année scolaire 1999-2000.

La situation « Expérience de Bernoulli »

Le premier contexte était celui de la vie courante. Les élèves devaient observer et décrire deux situations aléatoires précises : la sortie d'un parking d'une grande surface et la sortie de leur Collège. Pour le premier contact avec les situations aléatoires, les deux groupes d'élèves, ceux de la classe de Troisième et ceux de la classe de Seconde, ont été placés devant des démarches distinctes : la classe de Troisième a réalisé effectivement les observations, alors que la classe de Seconde a évoqué les observations afin de les décrire, activité de pensée censée introduire la notion d'expérience aléatoire et sa donnée par son protocole expérimental.

La deuxième activité de l'ingénierie a introduit l'expérience de référence, à partir de laquelle les élèves devaient s'engager dans l'abstraction vers le modèle d'urne de Bernoulli. Les deux groupes ont réalisé quelques tirages *au hasard* dans un pot rempli de perles rouges et de perles bleues, dans une proportion qu'ils ne connaissaient pas a priori mais qu'ils pouvaient obtenir par comptage des perles dans œ pot. Cette activité débouchait sur la notion de modèle d'urne de Bernoulli.

Comme nous l'avons remarqué dans la conclusion du Chapitre IV, les élèves ont pu s'engager dans le processus de modélisation envisagée par notre ingénierie grâce à la réalisation effective des expériences proposées. Cet engagement s'est manifesté par deux comportements : soit la recherche de la composition de l'urne de Bernoulli associée à l'expérience en jeu, soit par l'association entre les éléments de la population et les perles du pot (ou les boules de l'urne). Le déroulement de la situation «Expérience de Bernoulli », ainsi que le déroulement des deux situations qui suivent, « Urne à Pixels » et « Franc-Carreau », nous autorise à penser que cette réalisation effective des expérimentations a été cruciale pour cet engagement. Prenons l'exemple du deuxième groupe, pour lequel la réalisation de la première expérience était seulement évoquée (la sortie du parking). Nous avons remarqué une résistance de la part de ces élèves à formuler un protocole expérimental pour décrire une telle expérimentation selon un point de vue qualitatif. La perception des caractéristiques qualitatives pertinentes pour la modélisation de cette expérience a été difficile pour ces élèves, qui passaient tout de suite à la recherche d'éléments quantitatifs. Par exemple, ils ont cherché immédiatement les proportions mises en jeu par les valeurs numériques fournies par l'énoncé [87] : « (…) *supposons que dans ce parking il y ait 700 voitures, parmi lesquelles 154 rouges* » sans passer par la phase d'identification d'une configuration de Bernoulli. Par la suite, la proposition de la réalisation effective de l'expérience de référence « tirage au hasard dans un pot rempli de perles bleues et de perles rouges » a permis à ces élèves de s'engager dans le processus de modélisation envisagé.

Nous avons pu observer certaines difficultés lors de la formulation d'un protocole expérimental pour décrire de façon opératoire les expériences en jeu, soit pour le groupe qui a réalisé effectivement cette expérience, soit pour le groupe qui l'a seulement évoqué. Ces difficultés étaient liées à la difficulté de reconnaissance des propriétés de la situation aléatoire en jeu, propriétés qui soient pertinentes pour sa reproduction. Ainsi, un résultat de cette recherche est la mise en évidence de la nécessité de mettre en place une situation expérimentale qui commence par une description d'une observation ou d'une expérimentation réalisée. Cette description doit ensuite être mise en fonctionnement pour la reproduction de cette expérience, et éventuellement, reformuler la description originale à partir des nouvelles informations sur son opérationnalité.

Nous avons aussi constaté que les deux groupes d'élèves qui ont participé à notre expérimentation ont bien accepté l'introduction de la notion de modèle pour comparer deux expériences : la sortie du parking ou la sortie du collège et le tirage au hasard dans le pot de perles. Dans le processus d'abstraction qu'ils ont entamé, les étiquettes « pot » et « perles » ont été utilisées pour désigner les éléments du modèle pseudo-concret : les élèves utilisaient « pot » pour désigner « urne » ainsi que « perles » pour désigner « les boules » dans cette urne. L'assimilation entre les éléments de la population en jeu (les élèves dans le collège ou les voitures dans le parking) et les perles dans le pot a été une assimilation spontanée. Les élèves ont de plus bien mis en évidence la question de l'adéquation des modèles : comment représenter la sortie du parking ou la sortie du collège par un tirage au hasard avec remise, si les prélèvements réalisés dans les deux expériences excluent la possibilité de remises ? Ce questionnement nous indique que le processus de conceptualisation de la notion de modèle comme un représentant simplificateur de la réalité est déjà entamé chez ces élèves.

Une perspective qui s'ouvre à partir de ces résultats est l'inclusion dans la séquence

[87] Tâche 2 de la Fiche 2, première séance, classe de Seconde (cf. Annexe 2).

didactique proposée de la possibilité d'offrir plusieurs possibilités de composition d'une urne de Bernoulli pour représenter une même expérience aléatoire. Nous pouvons, par exemple, offrir la possibilité de représenter l'expérience « choisir un élève au hasard dans la classe et lui demander le jour de la semaine de son anniversaire, du lundi au dimanche ». Quelle population doit-on prend en compte pour la mise en œuvre de cette expérience ? Les jours de la semaine ou les dates d'anniversaire des élèves de la classe ?

La situation « Urne à Pixels »

La troisième et la quatrième activité, constitutives de la deuxième situation didactique, ont introduit l'urne à pixels comme expérience de référence lors d'un travail dans un environnement informatique, les problèmes étant proposés dans un contexte géométrique. La comparaison avec l'expérience du pot de perles a été possible grâce à cette notion d'urne à pixels discrétisant la surface d'un Cabri-dessin à partir de la notion primitive d'aire. L'aire de ce Cabri-dessin est alors déterminée par le comptage des pixels qui le tapissent. Pour aboutir à cette nouvelle appréhension de la surface d'une région délimitée à l'écran, nous avons choisi une interprétation didactique du pixel : un carré unité-élémentaire. Les élèves sont ainsi invités à assimiler le rapport entre le nombre de pixels qui tapissent deux rectangles à l'écran au rapport des nombres de boules dans une urne de Bernoulli. Nous avons montré que les élèves ont élargi spontanément leur appréhension de la pré-probabilité, en l'utilisant aussi pour exprimer le rapport d'aires dans une urne à pixels. Dans ces conditions, le tirage au hasard dans le pot de perles et le choix aléatoire d'un pixel dans le Cabri-dessin est possible grâce à l'existence d'une hypothèse de distribution uniforme sous-jacente.

Nous avons constaté que l'assimilation entre les pixels et les perles utilisées dans l'expérience de référence de la situation précédente n'a pas posé problème pour les élèves. Cela a facilité l'évolution du processus de conceptualisation de l'urne de Bernoulli, qui devient alors le représentant pseudo-concret d'expériences menées également dans un environnement informatique, en utilisant comme cadre un contexte géométrique. À ce stade de la séquence, les élèves disposent donc de deux représentations du modèle pseudo-concret, la représentation "numérique" de l'urne de Bernoulli (proportion) et la représentation géométrique (urne à pixels). Nous avons cependant observé des résistances des élèves pour revenir à la représentation géométrique. Dans la situation « Urne à Pixels », où l'expérience aléatoire consistait à « choisir *au hasard* un pixels dans le rectangle ABCD », on demandait de placer le point E sur le segment [AB] afin de représenter une urne de Bernoulli donnée. Cette tâche n'a pas été facile pour les élèves qui ont arrivé à la résoudre qu'avec l'aide de l'enseignant. Dans le processus de modélisation envisagé, la phase « validation du modèle » n'est pas encore significative chez eux.

La situation « Franc-Carreau »

Finalement, les deux dernières activités de l'ingénierie, constitutives de la dernière situation didactique, avaient pour objectif de mobiliser la démarche de modélisation introduite par les activités précédentes. Ainsi, nous avons demandé aux élèves de proposer la composition d'une urne de Bernoulli modélisant des jeux de Franc-Carreau proposés à l'écran. Cette activité a eu deux présentations distinctes, selon le groupe d'élèves. Pour la classe de Troisième, nous avons demandé aux élèves d'estimer les chances de faire franc-carreau lors de la mise en œuvre du jeu. La demande de modélisation est restée implicite dans la tâche que leur a été proposée. Pour la classe de Seconde, nous avons demandé explicitement la composition de l'urne de Bernoulli qui modélisait les jeux proposés à l'écran. Ce changement a été une conséquence des analyses que nous avons faite des productions obtenues des élèves de la classe de Troisième. En effet ceux qui n'avaient pas fait explicitement référence à un modèle d'urne de Bernoulli, avaient pu fournir la réponse demandée par un raccourci relevant peut-être d'un effet de contrat didactique : les élèves tirent directement les "chances" d'obtenir un succès à partir de la fréquence obtenue expérimentalement, donnée en pourcentage par Excel.

Du fait que l'évaluation des chances d'obtenir un succès lors de la réalisation d'une expérience aléatoire a été introduite au sein d'une démarche de modélisation, nous pouvons penser que les élèves ont construit leur raccourci aussi au sein de cette démarche. Ainsi, nous sommes placés devant deux interprétations possibles du comportement des élèves : l'utilisation de la fréquence expérimentale en tant que probabilité d'obtenir un succès ou l'utilisation de cette fréquence en tant qu'estimateur de cette probabilité. Nous n'avons pas d'éléments qui permettent de trancher. Une perspective ouverte par ces résultats de notre recherche est la mise en place d'un dispositif expérimental pour étudier la démarche des élèves dans des situations d'évaluation d'une probabilité par une démarche d'observation des fréquences stabilisées. Un tel dispositif doit permettre d'étudier les conceptions [(88)] de probabilité (pré-probabilité) mobilisées par ces élèves lors de la résolution d'un problème

[(88)] Nous nous rapportons ici aux conceptions au sens de Balacheff (1995) : un quadruplet constitué par l'ensemble P de problèmes pour lesquels la conception est opératoire ; l'ensemble R d'opérateurs utilisés par les élèves au sein d'une stratégie de résolution du problème posé ; l'ensemble L de langages utilisées ; finalement, l'ensemble Σ qui est une structure de contrôle qui assure la non contradiction de la conception C.

appartenant à cette catégorie. Plus particulièrement, on pourrait s'intéresser à dégager les invariants qui l'élève utilise comme opérateur ou dans la structure de contrôle, parties de la conception de probabilité en jeu : comment ces élèves valident-ils l'évolution de leur stratégie pour évaluer une probabilité au moyen d'un modèle, et les résultats obtenus à chaque étape de cette évolution ?

Le déroulement de cette situation didactique nous a permis de confirmer l'importance de la réalisation effective de l'expérience par les élèves eux-mêmes, comme nous l'avons montré dans l'analyse de la situation « Expérience de Bernoulli » au Chapitre IV. Suite à la présentation aux élèves des tableaux contenant des résultats d'une série d'épreuves, nous avons constaté une résistance de leur part à l'utilisation des données ainsi présentées. En conséquence, lorsque les élèves ont été confrontés à des entraves d'ordre technique (manipulation du dispositif informatique), nous avons constaté une résistance à l'utilisation de la démarche expérimentale pour résoudre le problème d'évaluer la probabilité d'obtenir « franc-carreau ». Pourtant, la simple lecture des résultats fournis dans ces tableaux est moins coûteuse que la mise en place d'un calcul a priori du rapport d'aires : elle demande seulement la mise en relation entre les fréquences stabilisées, déjà disponibles, et la valeur approximative de la probabilité cherchée. La difficulté de considérer les données fournies dans les tableaux, mais non obtenus expérimentalement par eux-mêmes, comme susceptibles de donner la probabilité demandée, réside dans le besoin d'évoquer une expérience fictive pour donner du sens aux valeurs ainsi présentées. Autrement dit, les élèves doivent évoquer la réalisation d'une expérience aléatoire ayant pour résultats les valeurs fournies dans les tableuax. Comme nous l'avons montré dans la première situation « Expérience de Bernoulli », les élèves ne s'engagent pas spontanément dans une démarche de modélisation pour résoudre ce problème. Soulignons l'importance d'une familiarisation préalable avec l'outil, calculatrice ou ordinateur, utilisé lors de la mise en place d'une démarche de simulation dans un environnement informatique. Sans cette familiarisation préalable, les élèves peuvent ne pas reconnaître les éléments du milieu prévu pour intervenir dans la situation didactique. Nous nous rapportons ici aux éléments propres à l'environnement en jeu, en l'occurrence l'environnement Cabri. Cette non-reconnaissance des rétroactions possibles par le milieu offert par Cabri provoque alors des difficultés pour le processus de conceptualisation de la notion d'urne de Bernoulli, ainsi que pour la mobilisation de la pré-probabilité. En conséquence, dans notre activité, lorsque les élèves sont confrontés à des situations dans lesquelles ils doivent choisir entre plusieurs jeux de Franc-Carreau, soit dans une même configuration soit dans diverses configurations, ils font appel à des raccourcis : des comparaisons entre des éléments intra ou inter figuraux non pertinentes pour l'expérience aléatoire en jeu (cf.. Chapitre VI).

Une perspective pour éviter ce type d'obstacle didactique est la mise en place d'une pré-séance dont l'objectif est l'entraînement des élèves à l'utilisation des outils informatiques, particulièrement, l'utilisation de Cabri-géomètre II, afin de bien exploiter toutes ces possibilités.

Les résultats globaux

L'analyse des résultats obtenus par cette recherche nous autorise à supposer que la démarche de modélisation que nous avons proposée, soit en environnement informatique soit hors de ce type d'environnement, est accessible aux élèves en charnière collège-lycée. En effet, les connaissances et les compétences qui constituent les pré-requis sont déjà installées dès le collège.

Nous avons pu constater que les élèves acceptent le modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli pour représenter les situations aléatoires proposées par notre ingénierie didactique. Ils sont capables de formuler une composition d'urne de Bernoulli modélisant une situation bien déterminée, à partir de l'association entre cette expérience en jeu et une expérience de référence : le tirage au hasard dans un pot de perles ou le choix au hasard d'un pixel dans un Cabri-dessin.

Nous pouvons ainsi conclure que la mise en place de l'ingénierie didactique, conçue à partir de nos hypothèses de recherche, conduit à des résultats qui convergent vers notre questionnement principal : la recherche des conditions didactiques qui favorisent une familiarisation avec des situations aléatoires en contexte scolaire. Ces situations favorisent aussi l'engagement des élèves dès le Collège dans une appréhension de telles situations en termes de modèle de nature probabiliste. Ils peuvent ainsi construire le lien entre "chances" a priori (pré-probabilité) et fréquence stabilisée comme mesure approximative de cette probabilité.

Si les résultats que nous avons obtenus ne nous autorisent pas à conclure avec certitude sur ces acquis, ils nous donnent des indications précises sur les variables didactiques à considérer lors d'un travail sur l'aléatoire : le choix de présenter des situations simples où le hasard intervient dans des conditions reproductibles, la modélisation pseudo-concrète de ces situations aléatoires pour aboutir à la notion d'expérience aléatoire. Le choix de ces variables a pour objectif de voir fonctionner en acte la notion de probabilité que nous avons appelée *pré-probabilité*. Et puis, ensuite, le lien avec la stabilisation des fréquences pour voir fonctionner la dualité des approches de cette notion de probabilité.

Du fait que nous avons limité notre expérimentation à la comparaison par les élèves de situations aléatoires très élémentaires du point de vue probabiliste, nous n'avons pas pu observer chez eux le niveau de mobilisation de la notion d'urne de Bernoulli. Les résultats que nous avons obtenus ne suffisent pas pour conclure à l'usage de ce modèle comme un outil de résolution de problèmes. Nous nous limiterons ici à remarquer la possibilité de la construction d'un tel modèle par les élèves dans les conditions didactiques que nous venons d'expliciter.

Les résultats de cette recherche nous offrent ainsi la possibilité de poser de nouvelles questions sur les conditions didactiques favorisant un premier contact avec l'aléatoire dans une démarche de modélisation :

- ✓ Quel rôle jouent les concepts que nous avons introduits (pseudo-concret, expérience aléatoire, protocole expérimental, modèle d'urne de Bernoulli, pré-probabilité), selon le point de vue de la dialectique outil-objet, ainsi que selon le point de vue de l'anthropologie cognitive dans ce processus de modélisation proposé ?
- ✓ Quels rôles jouent les notions de base de la statistique descriptive et les propriétés des proportions dans la conceptualisation de la notion de probabilité au sein du modèle d'urne de Bernoulli ?
- ✓ Comment évoluent les conceptions spontanées des élèves sur la probabilité (comment évolue la pré-probabilité) au sein d'un processus d'apprentissage des probabilités par une démarche de modélisation ?
- ✓ Comment placer les élèves dans un milieu a-didactique pour la résolution de problèmes de probabilités, faisant intervenir la modélisation d'une situation aléatoire par une urne de Bernoulli ?

Bibliographie et références.

Artigue M. (1988). Ingénierie Didactique. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 9/3, 281-308, re-publié dans Brun J. (dir.), *Didactique des Mathématiques*, 1996, 243-274. Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Bachelard (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. 16e tirage (1996). Paris : Librairie Philosophique J. Vrin.

Badizé M., Jacques A., Petitpas M. & Pichard J.-F. (1996). *Le jeu du franc-carreau – une activité probabiliste au Collège*. Rouen : IREM de Rouen.

Balacheff, N. (1994a). Didactique et Intelligence Artificielle. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14/1.2, pp. 9-42.

Balacheff, N. (1994b). La Transposition Informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. In Artigue et al. (eds.) *Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France*, 364-370. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Balacheff N. (1995) Conception, connaissance et concept. In *Séminaire DidaTech* n°157, pp.219-244. Grenoble : IMAG.

Batanero C. & Serrano L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicationes educativas. In *UNO – Revista de didática de las Matemáticas*, 5, 15-28.

Bellhouse D.R. (2000) "De Vetula": a medieval manuscript containing probability calculations. In *International Statistical Review*, 68/2, 123-136.

Bernat P. (1997). Evaluation et évolution d'un logiciel de géométrie dynamique. In *Repères – IREM*, 28, 9-36.

Bernoulli J. (1713). *L'Ars Conjectandi*. N. Meusnier (trad. – 1987). Rouen : IREM de Rouen et Université de Rouen Haute-Normandie.

Boero P et al. (1995). Aspects of the mathematics-culture relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school. In *Proceedings of the 19th International Conference for 20th Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 151-166. Recife : Universidade Federal de Pernambuco.

Bordier J. (1991). *Un modèle didactique, utilisant la simulation sur ordinateur, pour l'enseignement de la probabilité*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris 7.

Borovcnik M. & Peard R. (1996) Probability. In Bishop et al. (eds.) *International handbook of Mathematics Education*, 239-287. Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Borovcnik M., Bentz H.-J. & Kapadia R. (1991). A Probabilistic Perspective. In Kapadia & Borovcnik (eds.) *Chance Encounters : Probability in Education*, 27-71. Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115.

Brousseau G. (1993). *Stratégies de l'analyse statistique – cours et aide-mémoire à l'intention des professeurs en formation*. Bordeaux : LADIST.

Brousseau G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In *Actes de la VIII[e] école d'été de didactique des mathématiques,* 3-46. Clermont-Ferrant : IREM de Clermont-Ferrand.

Bru B. (1981). Petite Histoire du Calcul des Probabilités. In *Fragments d'Histoire des Mathématiques*. Brochure APMEP 41, 141-158.

Cañizares M. J. (1997*). Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio de crencias subjetivas en las intuitiones probabilisticas primarias*. Thèse de Doctorat. Granada : Universidad de Granada.

Capponi B. & Laborde C. (1995). Modélisation à double sens. In *Actes de la VIII[e] école et université d'été de didactique des mathématiques*, 265-278.

Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des Mathématiques au Collège – Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. In *Petit X*, 19, 43-72.

Chevallard Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In Noirfalise et Perrin-Glorian (coords.) *Actes de la VIII[e] école et université d'été de Didactique des Mathématiques*, 83-122. Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

Chrétien & Gaud (1998). Qu'est-ce que le hasard ? Comment le mathématiser ? In *Repères – IREM*, 32, 81-110.

Cournot M. A. A. (1843). *Exposition de la Théorie des Chances et Probabilités*. Paris : Hachette.

Coutinho C. (1994). *Introdução ao Conceito de Probabilidade pela visão Freqüentista - Estudo Epistemológico e Didático.* Dissertação de Mestrado. São Paulo : Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Coutinho C. et al. (1996). Introdução ao Conceito de Probabilidade para adolescentes (12-13 anos). In *Anais do IV Encontro Paulista de Educação Matemática*, 165-170. São Paulo : PUC-SP e SBEM.

D'Alembert (1784). Croix ou Pile. In *Encyclopédie Méthodique*, tome premier, 471-472.

Duval R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure. In *Repères-IREM*, 17, 121-137.

Farago F. (1999). *Le langage*. Collection Cursus – Philosophie. Paris : Armand Colin.

Fischbein E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Fontana & Bernard (2000). Expérimentation, modélisations, simulations : des outils problématiques pour l'enseignement de la statistique. In *Actes du Colloque EM2000.* Grenoble. (à sortir).

Gandit M. & Helmstetter C. (1998). Expérimenter, simuler en classe. In *Repères – IREM*, 32, 25-41.

Girard J.-C. & Parzysz B. (1998). De la modélisation en mathématiques. In *Bulletin APMEP*, 418, 573-582.

Girard J.-C. (1997). Un exemple de confusion modèle-réalité. In Chaput B. & Henry M. (coords.) *Enseigner les probabilités au Lycée*, 70-72. Reims : IREM de Reims.

Henry M. (1994). *L'enseignement des probabilités – perspectives historiques, épistémologiques et didactiques*. Besançon : IREM de Besançon.

Henry M. (1997a). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In Chaput B. & Henry M. (coords.) *Enseigner les probabilités au Lycée*, 77-84. Reims : IREM de Reims.

Henry M. (1997b). Notion d'expérience aléatoire. Vocabulaire et modèle probabiliste. In Chaput B. & Henry M. (coords.) *Enseigner les probabilités au Lycée*, 85-92. Reims : IREM de Reims.

Henry M. (1997c). Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ? Modélisation en Probabilités. Introduction de la partie B. In Chaput B. & Henry M. (coords.) *Enseigner les probabilités au Lycée*, 55-56. Reims : IREM de Reims.

Israel G. (1996). *La mathématisation du réel*. Paris : Éditions du Seuil.

Jahn, A. P. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre*. Thèse de Doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Laborde C. (1994). Enseigner la géométrie : permanences et révolutions. In *Bulletin APMEP*, 396, 523-548.

Lahanier-Reuter D. (1998). *Étude de conceptions du hasard : approche épistémologique, didactique et expérimentale en milieu universitaire*. Thèse de Doctorat. Rennes : Université de Rennes I.

Laplace P.-S. (1814). *Essai Philosophique sur les Probabilités*. (5e édition en 1825, réimprimée en 1985), Paris : Christian Bourgois éditeur.

Lecoutre M-P. (1985). Effet d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 6/2-3, 193-213.

Lestienne R. (1993). *Le hasard créateur*. Paris : Éditions La Découverte.

Loève M. (1978). Calcul des Probabilités. In J. Dieudonné (dir.) *Abrégé d'histoire des mathématiques : 1700 – 1900*, tomme II, chapitre XII, 277-313. Paris : Hermann.

Margolinas C. (1993). De l'importance du vrai et du faux. Grenoble : La pensée sauvage.

Martin T. (1996). *Probabilités et critique philosophique selon Cournot*. Coll. Mathesis. Blay & Sinaceur (dir.). Paris : Librairie Philosophique J. Vrin.

Maury S. (1986). *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes*. Thèse d'Etat. Montpellier : Université de Montpellier.

Mesnard J. (1991). *Blaise Pascal – œuvres complètes*. Paris : Desclée de Brouwer.

Montucla J.-F. (1802). *Histoire des Mathématiques*. Tome troisième, 380-426. Réédition (1968). Paris : Blanchard.

Pavé (1994). *Modélisation en Biologie et en écologie*. Lyon : éditions Aléas.

Perrin-Glorian, M.-J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 19/3, 279-322.

Piaget J. & Inhelder B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. 2e édition (1974). Paris : Presses Universitaires de France.

Pichard J.–F. (1997). La théorie des probabilités au tournant du XVIIe siècle. In Chaput B. & Henry M. (coords.) *Enseigner les probabilités au Lycée*, 105-130. Reims : IREM de Reims.

Poincaré H. (1912). *Calcul des Probabilités*. Réimpression de la 2e édition, 1987. Paris : Gauthier-Villars.

Raymondaud H. & Henry M. (1998). Attention ! Un modèle peut cacher un autre. In *Repères – IREM*, 32, 43-62.

Raymondaud H. (1997). Modèles d'urnes pour les lois discrètes, expériences réelles et simulations numériques. In Chaput B. & Henry M. (coords.) *Enseigner les probabilités au Lycée*, 251-291. Reims : IREM de Reims.

Rényi A. (1966). *Calcul des Probabilités*. Paris : Ed. Dunod. Réédition (1992). Sceaux : Ed. Gabay.

Robardet G. & Guillaud J.-C. (1997). *Eléments de Didactique des Sciences Physiques*. Paris : Presses Universitaires de France.

Robert A. (1992). Problèmes Méthodologiques en Didactiques des Mathématiques. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 12/1, 33-58.

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 18/2, 139-190.

Sere M.-G. (1992). Le déterminisme et le hasard dans la tête des élèves (ou de l'utilité du traitement statistique des séries de mesures). In *Bulletin de L'union des Physiciens*, sans éd., 86, 87-96.

Serrano L.-R. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Thèse de doctorat. Granada : Universidad de Granada.

Shaughnessy J.-M. & Batanero C. (1995). Un enfoque visual para enseñar probabilidades binomiales. In *Uno*, 5, 103-112.

Steinbring H. (1991). The Theoretical Nature of Probability in the Classroom. In R. Kapadia & M. Borovcnik (eds.) *Chance Encounters: Probability in Education*. Coll. Mathematics Education Library, 135-167. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stigler S. M. (1984). *The History of Statistics : the measurement of uncertainity before 1900*. (7e réimpression en 1998). Cambridge, Massachusetts, and London, England : the Belknap Press of Harvard University Press.

Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10/2.3, 133-170.

Zaki M. (1990). *Traitements de Problèmes de Probabilités en Situation de Simulation*. Thèse de Doctorat. Strasbourg : Université Louis Pasteur.

ANNEXES

Annexe 1 : Caractéristiques de l'échantillon constitué

A-) Organisation de l'enseignement français.

Niveau	École élémentaire					Collège				Lycée		
	CP	CE1	CE2	CM1	CM2	6^{e}	5^{e}	4^{e}	**3^{e}**	**2^{nd}**	1^{re}	Terminale
Âge	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	**14-15**	**15-16**	16-17	17-18

B-) Connaissances préalables en Statistique [89].

Rappel des programmes de Collège :

Sixième

Exemples conduisant à lire et établir des relevés statistiques sous forme de tableaux ou de représentations graphiques, éventuellement en utilisant un ordinateur.

Cinquième

Lecture, interprétation, représentations graphiques de séries statistiques. Diagrammes à barres, diagrammes circulaires.
Classes, effectifs, Fréquences.

Quatrième

Effectifs cumulés, fréquences cumulées. Moyennes pondérées.
Initiation à l'usage des tableurs-grapheurs.
Valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles.

Troisième

Caractéristiques de position d'une série statistique.
Approche de caractéristiques de dispersion d'une série statistique. Initiation à l'utilisation des tableurs-grapheurs en statistique.

En seconde le travail sera centré sur :

- la réflexion conduisant au choix de résumés numériques d'une série statistique quantitative ;
- la notion de fluctuation d'échantillonnage vue ici sous l'aspect élémentaire de la variabilité de la distribution des fréquences ;
- la simulation à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice. La simulation remplaçant l'expérimentation permet, avec une grande économie de moyens, d'observer des résultats associés à la réalisation d'un très grand nombre d'expériences. On verra ici la diversité des situations simulables à partir d'une liste de chiffres.
- L'enseignant traitera des données en nombre suffisant pour que cela justifie une étude statistique ; il proposera des sujets d'étude et des simulations en fonction de l'intérêt des élèves, de l'actualité et de ses goûts.
- La notion de fluctuation d'échantillonnage et de simulation ne doit pas faire l'objet d'un cours. L'élève pourra se faire un « cahier de statistique » où il consignera une grande partie des traitements de données et des expériences de simulation qu'il fait, des raisons qui conduisent à faire des simulations ou traiter des données, l'observation et la synthèse de ses propres expériences et de celles de sa classe. Ce cahier sera complété en première et terminale et pourra faire partie des procédures d'évaluation annuelle.

Le tableau ci-dessus indique les choix de transposition didactique que nous pouvons

---

[89] Ce tableau est rappelé dans le programme de la classe de Seconde, applicable à la rentrée 2000.

rencontrer dans les programmes. La recherche des connaissances effectives des élèves (rapport institutionnel, rapport personnel ou encore les conceptions) par rapport aux notions indiquées dans les programmes et qui peuvent constituer les connaissances préalables des élèves, n'est pas objet de cette thèse.

L'enseignement du Calcul des Probabilités se fera après la classe de Seconde, selon les spécificités de chaque série : Scientifique, Économique et Sociale ou Littéraire.

C-) Participation des élèves dans chacune des séances de l'ingénierie didactique.

C1-) Classe de Troisième.

Tableau 33

Prénom	Situation A		Situation B	Situation C
	Séance 1 (activité A_1)	Séance 2 (activité A_2)	Séance 3	Séance 4
Albane	X			
Alexia	X	X	X	X
Anne	X	X	X	X
Audrey		X	X	X
Aurélie	X	X	X	X
Benjamin	X	X	X	X
Camille	X	X	X	X
Celia	X			X
Damien	X			X
Elise	X	X	X	X
Eric				X
Fabien	X			X
Florence	X		X	X
Frederic	X	X	X	X
Guillaume	X	X	X	X
Jessica	X	X	X	X
Jessica	X	X	X	X
Julien	X			X
Laurent	X	X	X	X
Loï c	X		X	X
Marilyne	X	X	X	
Maxime	X	X	X	X
Morgane	X	X	X	X
Nadège	X	X	X	X
Nicolas	X		X	X
Romain	X			X
Sabrina	X	X	X	X
Vincent	X			X
Vincent	X	X	X	

Xavier	X		X	
Zubeydé	X	X	X	X

C2-) Classe de Seconde.

Tableau 34

Prénom	**Situation A (séance 1)**	**Situation B (séance 2)**	**Situation C (séance 3)**
Anaïs	X	X	X
Anna	X	X	X
Bénédicte	X	X	X
Camille	X		X
Camille	X	X	X
Caroline	X	X	X
Christelle	X	X	X
Claire	X	X	X
Cyrielle	X	X	X
Cyril	X	X	X
Djamel	X	X	X
Emilie	X	X	X
Etienne		X	X
Gaëlle	X	X	X
Grégory	X	X	X
Hanna	X	X	X
Isabelle	X	X	X
Jérémy	X	X	X
Julie	X		X
Julien	X	X	X
Kévin	X	X	X
Marylène	X	X	X
Mélanie	X	X	X
Melissande	X	X	X
Myriam	X	X	X
Nathalie	X	X	X
Olivier	X	X	X
Rose	X	X	X
Stéphanie	X	X	X
Thomas		X	X
Yaël	X	X	X

D-) Familiarité d'usage du logiciel Cabri-géomètre II

Aucun des élèves, dans les deux groupes, n'avait l'habitude de manipuler le logiciel. Pour les élèves de la classe de Troisième, l'enseignant utilisait Cabri I, disponible dans les ordinateurs Macintosh placés dans la classe. Les élèves de la classe de Seconde n'avaient pas encore eu de contact avec le logiciel, la mise en place des activités n'ayant eu lieu qui au début de l'année scolaire (Septembre/1999).

Annexe 2 : fiche des élèves de la classe de Troisième.

Fiche 0 : travail préalable.

1) Proposez 2 exemples de situations que vous avez rencontrées dans lesquelles le hasard intervient. Proposez au moins une situation qui ne soit pas un jeu de hasard. Faites ces propositions par écrit.

2) En se plaçant en tant qu'observateur, faites une description des situations présentées ci-dessous.

Situation 1 : Observez les voitures qui sont dans un parking d'une grande surface. Parmi elles, il y en a des rouges. Peut-on savoir d'avance si la première voiture qui va sortir du parking sera rouge ? Pour avoir une idée sur la proportion de voitures rouges parmi l'ensemble du parking, notez le nombre de voitures rouges qui sortent du parking parmi les 10 premières. Répétez cette expérience plusieurs fois.

Situation 2 : On désire avoir une indication sur la proportion des filles parmi les élèves du collège. Pour cela, notez le nombre des filles parmi les 25 premiers élèves qui sortent du collège après la fin d'un cours. Recommencez cette observation plusieurs fois et préparez votre compte rendu.

Première Séance – Fiche 1 :

Pour l'exemple ci-dessous, donner la règle du jeu et l'ensemble de résultats possibles.

E1 : Le jeu de « pile ou face » avec une pièce.

E2 : On choisit "au hasard" un élève dans la classe et on demande le jour de son anniversaire en 1999, du lundi au dimanche.

E3 : On choisit "au hasard" un élève dans une classe de 18 filles et 12 garçons et l'on observe si on tombe sur un garçon ou sur une fille.

E4 : Dans un parking d'une grande surface, on observe la première voiture qui sort pour noter sa couleur.

E5 : On fait tourner une roulette pour laquelle il y a 5 secteurs de mêmes dimensions dont 3 blancs et 2 rouges.

E6 : On lance un dé sur une table et l'on veut observer sa face supérieure après immobilisation.

E7 :On démarre un chronomètre et l'on demande à une autre personne de dire «stop » pour qu'on l'arrête. On note le chiffre des centièmes de secondes affiché.

Question : Est-il possible de décrire les situations (parking et collège) comme une expérience où l'on tire au hasard dans un ensemble d'objets ?

Deuxième Séance – Fiche 1

On vous présente un pot qui contient des perles rouges et bleues. Voici les règles pour jouer à ce jeu.

a) On mélange les perles dans le pot.
b) On tire une perle au hasard.
c) On note la couleur de cette perle.
d) On remet la perle dans le pot.

Faites 50 tirages successifs, en remplissant le tableau ci-dessous avec les résultats.

Tirage	Couleur	Tirage	Couleur	Tirage	Couleur	Tirage	Couleur	Tirage	Couleur
1		11		21		31		41	
2		12		22		32		42	
3		13		23		33		43	
4		14		24		34		44	
5		15		25		35		45	
6		16		26		36		46	
7		17		27		37		47	
8		18		28		38		48	
9		19		29		39		49	
10		20		30		40		50	

Reprenons l'activité sur la répartition des élèves du collège entre filles et garçons. Si nous représentons les filles par les perles rouges et les garçons par les perles bleues, pensez-vous que ces tirages que vous venez de faire peuvent remplacer les observations réelles ? Pourquoi ?

Deuxième Séance - Fiche 2.

Dans un pot rempli de perles colorées, les perles blanches représentent les « succès » et les noires les «échecs ». Combien de perles de chaque couleur devrait-il y avoir dans ce pot pour qu'on puisse réaliser une simulation des expériences aléatoires ci-dessous.

a) Le jeu de « pile ou face » avec une pièce.

Succès : Obtenir la position « face »

Nombre de perles blanches :	Nombre de perles noires :	Nombre total de perles :
Justifiez votre réponse :		

b) On choisit "au hasard" un élève dans la classe et on lui demande le jour de son anniversaire en 1999, du lundi au dimanche.

Succès : L'anniversaire tombe sur un « dimanche »

Nombre de perles blanches :	Nombre de perles noires :	Nombre total de perles :
Justifiez votre réponse :		

c) On choisit “au hasard” un élève dans une classe de 18 filles et 12 garçons et l’on observe si on tombe sur un garçon ou sur une fille.
Succès : Choisir une « fille »

Nombre de perles blanches :	Nombre de perles noires :	Nombre total de perles :
Justifiez votre réponse :		

d) On fait tourner une roulette pour laquelle il y a 5 secteurs de mêmes dimensions dont 3 blancs et 2 rouges.
Succès : Obtenir un secteur « rouge »

Nombre de perles blanches :	Nombre de perles noires :	Nombre total de perles :
Justifiez votre réponse :		

e) On lance un dé sur une table et l’on veut observer sa face supérieure après immobilisation.
Succès : Obtenir un « six »

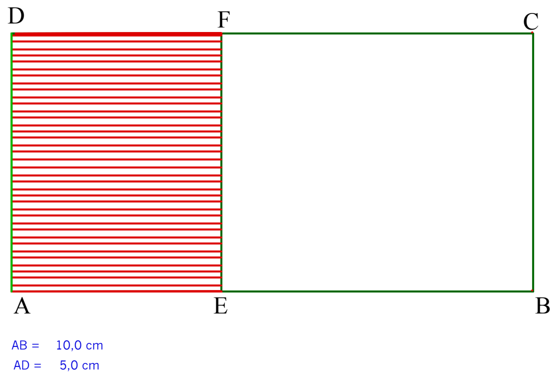
Nombre de perles blanches :	Nombre de perles noires :	Nombre total de perles :
Justifiez votre réponse :		

f) On démarre un chronomètre et l’on demande à une autre personne de dire « stop » pour qu’on l’arrête. On note le chiffre des centièmes de secondes affiché.
Succès : Obtenir un « multiple de 3 »

Nombre de perles blanches :	Nombre de perles noires :	Nombre total de perles :
Justifiez votre réponse :		

Troisième Séance – Fiche 1

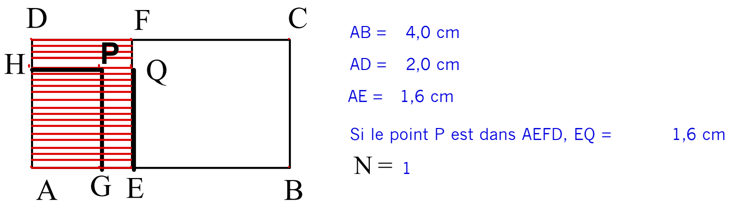
Soit le rectangle ABCD de côtés 10,0 cm et 5,0 cm. Soit le segment [EF] parallèle à [AD], déterminant une partition de ce rectangle. Dans un premier temps, on suppose que AE = 4,0 cm.



Tâche 1 : Montrez que la proportion donnée par $\frac{\text{aire AEFD}}{\text{aire ABCD}} = \frac{\text{AE}}{\text{AB}}$ est correcte, quelle que soit la position du point E sur [AB].

Tâche 2 : Que pouvez-vous dire du rapport entre le nombre des pixels situés à l'intérieur du rectangle AEFD et le nombre des pixels recouvrant ABCD ?

Troisième Séance – Fiche 2



Nous voulons choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD. Dans ce but, nous pouvons associer à ce pixel un point P (x ; y), centre du pixel. Pour obtenir ces coordonnées, nous utilisons la fonction RAND dans la calculatrice. Pour l'expérience en cours, nous considérons comme un "succès" le fait que le point obtenu soit dans le rectangle AEFD. Ce fait sera indiqué, dans la figure, par l'existence du point Q à l'intersection des segments [HP] et [EF] à chaque fois qui le point Q ne soit pas dans AEFD.

Tâche 1 : Décrivez cette expérience aléatoire en précisant les commandes Cabri que vous avez utilisé.

Tâche 2 : Nous voulons réaliser quelques répétitions de l'expérience aléatoire « placer un point P au hasard dans le rectangle ABCD ». Dans ce but, nous utiliserons une animation sur le nombre N, qui est un compteur qui donne le total de points P obtenus.

a) Ouvrez la figure « urne 1 » dans la TI-92.
b) Associez un tableur à la mesure EQ
c) Animez le compteur N jusqu'à obtenir N = 50.
d) Notez dans le tableau ci-dessous le nombre de succès indiqué sur le tableur.
e) Répétez l'animation 10 fois.

	Nb de points obtenus	Nb succès	Nb de points cumulé (T)	Nb de succès cumulé (S)	Rapport $\frac{S}{T}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Tâche 3 : L'expérience aléatoire de choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD, est-elle équivalente au tirage au hasard d'une perle dans un pot qui contient des perles blanches et des perles noires ? Quelle urne de Bernoulli proposez-vous pour la représenter ? Justifiez votre réponse.

<u>Pour réaliser une animation sur le compteur N</u>

- Appuyer sur la touche [F7]
- Appuyer sur la touche [3 : Animation]
- Placer le pointeur sur le nombre « 1 » indiqué par le compteur N.
- Appuyer sur la touche [enter]
- Appuyer sur les touches [main] et [↓]
- Relâcher les 2 touches au même temps pour démarrer l'animation.
- Appuyer sur la touche [esc] pour arrêter l'animation.

Pour éditer N, placer le pointeur sur le nombre et appuyer sur la touche [enter] deux fois.

<u>Pour associer un tableur.</u>

Dans notre simulation, nous voulons étudier la variation de la mesure de EQ.

- Appuyer sur la touche [F6]
- Appuyer sur la touche [7 : Collect Data]
- Appuyer sur la touche [2 : Define Entry]
- Placer le pointeur sur le nombre indiqué par EQ, qui doit grignoter.
- Appuyer sur la touche [enter]
- Appuyer sur la touche [F6]
- Appuyer sur la touche [7 : Collect Data]
- Appuyer sur la touche [1 : Store Data]
- Démarrer l'animation sur N.

<u>Pour lire le tableur.</u>

- Appuyer sur la touche [F8]
- Appuyer sur la touche [B : Data View] ➔ l'écran est donc partagé entre la figure et le tableur.
- Appuyer sur les touches [2^{nd}] et [APPS]: cette combinaison de permet de changer entre travailler sur la figure ou travailler sur le tableur.
- Pour trier les valeurs de la colonne, appuyer sur la touche [F6]
- Appuyer sur la touche [3 : Sort Column]

Pour se « promener » sur les valeurs de la colonne, utiliser les touches ↓ et ↑

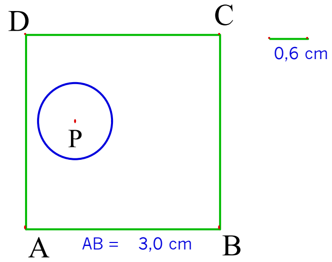
Quatrième Séance – Fiche 1

Ouvrir la figure « cercle » :

a) Allumer la calculatrice TI – 92
b) Appuyer sur la touche [APPS]
c) Appuyer sur la touche [8 : Geometry]
d) Appuyer sur la touche [2 : Open]
e) Sur l'écran apparaît la boîte de dialogue OPEN : folder ➔ expe
Variable ➔ cercle1
f) Appuyer sur la touche [enter] deux fois.

Soit le carré ABCD de côtés 3,0 cm. Soit un cercle de centre P et rayon r = 0,6 cm, placé “au hasard” dans ce carré.

Tâche 1 **:** À quelle condition le disque est-il placé **entièrement à l'intérieur** du carré ? Dans ce cas, nous dirons que le cercle est à « franc-carreau ».



Tâche 2 :Le jeu de Franc Carreau.

Ce jeu a été proposé pour la première fois en 1733 par un naturaliste et mathématicien français, Georges-Louis Leclerc de Buffon, qui a été plus connu comme naturaliste. Il consiste à jeter un écu[90] au-dessus d'un carrelage. Les joueurs parient sur la position finale : tombera-t-elle, cette pièce de monnaie, entièrement sur un seul carreau (franc-carreau), sur un joint entre deux carreaux, ou encore sur deux, trois ou quatre joints ?

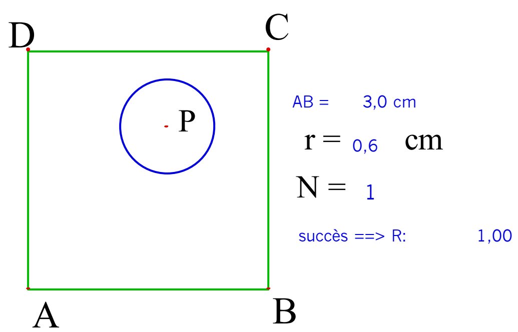
Considérons comme succès de cette expérience aléatoire « la pièce tombe à franc-carreau ». On construit le cercle de centre P et rayon 0,6 cm en utilisant la macro construction X pour simuler ce jeu.

a) À l'aide de la calculatrice TI-92, déterminer la probabilité d'obtenir la position « franc-carreau » ? Justifiez votre réponse.

Pour ouvrir la figure qui contient le compteur N :

f) Appuyer sur la touche $\boxed{\text{F8}}$
g) Appuyer sur la touche $\boxed{\text{1 : Open}}$
h) Sur l'écran apparaît la boîte de dialogue OPEN : folder ➔ expe Variable ➔ cercle2
i) Appuyer sur la touche $\boxed{\text{enter.}}$

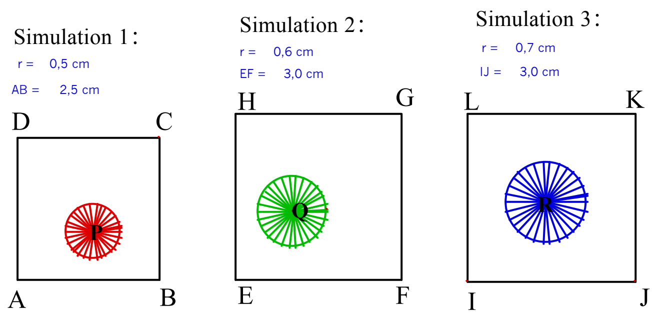
Pour faire fonctionner la macro construction X plusieurs fois il suffit de faire une animation sur le compteur N.



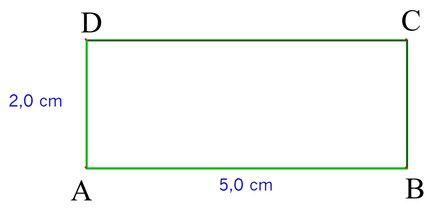
b) Pouvez-vous utiliser un calcul direct pour vérifier ces résultats expérimentaux ? Justifiez votre réponse.

[90] Écu : ancienne monnaie française.

Tâche 3 : On construit 3 simulations différentes du jeu avec un carré et un cercle dont les tailles sont différentes. Laquelle choisiriez-vous pour avoir plus de chances d'obtenir un succès. Justifiez votre réponse.



Tâche 4 : En utilisant la simulation que vous avez choisie, construisez une urne à pixels qui représente ce jeu.



AE = ...

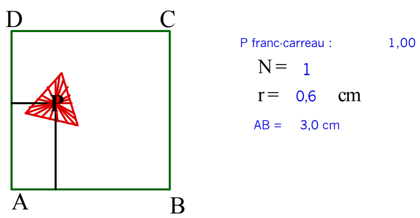
Justifiez votre réponse :

Quatrième Séance – Fiche 2

Ouvrir la figure « triangle » :

- ➢ Allumer la calculatrice TI – 92
- ➢ Appuyer sur la touche APPS
- ➢ Appuyer sur la touche 8 : Geometry
- ➢ Appuyer sur la touche 2 : Open
- ➢ Sur l'écran apparaît la boîte de dialogue OPEN : folder ➔ expe
Variable ➔ triangle
- ➢ Appuyer sur la touche enter deux fois.

Considérons le jeu de Franc Carreau. Nous voulons remplacer, dans ce jeu, l'écu par une plaque triangulaire (un triangle équilatéral). Nous présentons ici une simulation pour ce jeu pour laquelle une animation sur le compteur N simule un grand nombre de jets. Construisez une urne à pixels qui représente ce jeu pour lequel le succès sera que la plaque soit à franc carreau



Annexe 3 : fiche des élèves de la classe de Seconde.

Première Séance – Fiche 1

- Tâche 1.

Imaginez que vous êtes à la sortie du parking d'une grande surface, et que vous voulez avoir une idée de la proportion de voitures rouges dans l'ensemble de voitures qui sont garées dans ce parking sans compter toutes les voitures parce qu'il y en a trop. Peut-on savoir d'avance si la première voiture qui va sortir du parking sera rouge ?

(Oui) (Non) (Je ne sais pas)
Justifiez votre réponse :

Pour avoir une idée de cette proportion, vous pouvez observer le nombre de voitures rouges qui sortent du parking parmi les 20 premières, en supposant qu'aucune autre voiture n'entrera pendant l'observation.
Vous devez transmettre par écrit à un camarade absent, comment mener l'observation à la sortie d'un parking pour qu'il puisse estimer la proportion de voitures rouges. Ecrivez ci-dessous votre message à votre camarade.

- Tâche 2.

Proposez deux exemples de situations que vous avez rencontrées dans lesquelles le hasard intervient. Proposez au moins une situation que ne soit pas un jeu de hasard.

Pourquoi pensez-vous que le hasard intervient dans ces situations ?

Première Séance – Fiche 2

- Tâche 1.

Voici un pot qui contient des perles rouges et des perles bleues et les règles pour jouer à un jeu avec ce pot.

e) On mélange les perles dans le pot.
f) On tire une perle au hasard.
g) On note la couleur de cette perle.
h) On remet la perle dans le pot.

Faites 50 tirages successifs, en indiquant les résultats dans le tableau ci-dessous.

Tirage	Couleur	Tirage	Couleur	Tirage	Couleur	Tirage	Couleur	Tirage	Couleur
1		11		21		31		41	
2		12		22		32		42	
3		13		23		33		43	
4		14		24		34		44	
5		15		25		35		45	
6		16		26		36		46	
7		17		27		37		47	
8		18		28		38		48	
9		19		29		39		49	
10		20		30		40		50	

On admet qu'on a un succès si la perle qui est choisie est une perle rouge. Comptez le nombre de succès que vous avez obtenu dans ce jeu.
Nombre de succès : ………….

- Tâche 2.

Reprenons l'activité qui propose d'étudier la proportion de voitures rouges dans l'ensemble de voitures qui sont garées dans un parking. Supposons que dans ce parking il y ait 700 voitures, parmi lesquelles 154 rouges.

Soit d'une part l'Expérience Aléatoire « observer la couleur de la première voiture qui sort » et d'autre part l'Expérience Aléatoire «choisir une perle au hasard dans le pot et observer sa couleur ».

Quelle similitude et différences voyez-vous entre ces expériences aléatoires proposées ?

Justifiez votre réponse :

Deuxième Séance – Fiche 1
Ouvrir la figure « S2F1 » et le document « Barre d'outils S2 » dans Cabri.

- Exercice 1

Soit le rectangle ABCD et le segment [EF] parallèle à [AD], déterminant une partition de ce rectangle. Quelle relation y a-t-il entre les longueur des côtés et les aires des rectangles AEFD et ABCD ?

- Exercice 2

Combien les rectangles ABCD et AEFD contiennent-ils de pixels (bords compris) ?

Quelle relation y a-t-il entre le nombre de pixels et les aires de ces rectangles ?

- Exercice 3

Déplacez le point E sur le segment [AB]. Que pouvez-vous dire des relations établies dans la tâche précédente ?

- Exercice 4.

Soit l'Expérience Aléatoire « choisir un pixel P au hasard dans le rectangle ABCD ». On dira que le résultat est un succès si P tombe dans le rectangle AEFD. On a construit dans Cabri une macro construction « Pix » qui réalise cette expérience. Pour activer cette macro, les objets initiaux sont deux côtés consécutifs du rectangle ABCD, par exemple [AB] et [AD]. Le pixel choisit, qui est l'objet final de la macro, apparaît en vert sur l'écran.
Faites quelques répétitions pour se familiariser avec cette macro.

Question : Est-il possible de représenter cette Expérience Aléatoire par une Urne de Bernoulli ? Justifiez votre réponse.

Deuxième Séance - Fiche 2

Ouvrir la figure « S2F2A » dans Cabri.

- Exercice 5

Soit l'Expérience Aléatoire « choisir un pixel P au hasard dans le rectangle ABCD ». On dira que le résultat est un succès si P tombe dans le rectangle AEFD. Soit l'Urne à Pixels ci-dessous, qui représente cette Expérience Aléatoire, dans laquelle la distance AE est inconnue.
Faites 10 répétitions de cette Expérience Aléatoire en utilisant la macro construction « Pix » et notez le nombre de succès que vous avez obtenu.

Question : Que pouvez-vous dire à propos de la distance AE ? Justifiez votre réponse.

- Exercice 6.

Ouvrir la figure « S2F2B » dans Cabri.

Une animation du compteur N permet le fonctionnement automatique de l'Urne à Pixels un grand nombre de fois. Le but est répéter l'Expérience Aléatoire «choisir un pixel P au hasard dans le rectangle ABCD », pour laquelle on dira que le résultat est un succès si P tombe dans le rectangle AEFD.
Notez ici les résultats des simulations que vous avez réalisées.
Nombre d'essais : ……………………………………………………….
Nombre de succès : ………………………………………………..
Fréquence de succès : ……………………………………………..

Consignes pour réaliser l'animation :

a) Démarrez le tableur Excel et ouvrez le fichier « simulation ». Vous aurez l'écran partagé en contenant une fenêtre Cabri et une fenêtre Excel. Pour aller d'une à l'autre, c'est-à-dire, pour aller de Cabri à Excel et de Excel à Cabri, il suffit de "cliquer" sur la fenêtre sur laquelle vous voulez travailler.
b) En revenant sur la fenêtre Cabri, sélectionnez la table-Cabri et activez l'outil "Animation". Saisir le nombre N, en tirant vers le bas de l'écran avec le ressort qui apparaît. Arrêter l'animation quand N = 1000 (environ).
c) Sélectionnez la table à nouveau et, dans "Edition", sélectionner la commande "Copier". Activez le tableur Excel en "cliquant" sur la fenêtre « simulation ». Positionnez le curseur sur la case A1 et collez la table fournie par Cabri.
d) Notez les résultats indiqués dans la troisième colonne du tableur (nombre d'essais, sombre de succès et fréquence).
e) Pour recommencer l'animation, effacez les contenus des colonnes A et B d'Excel. Revenez sur Cabri et dans le menu Edition, choisir "Version Précédente".

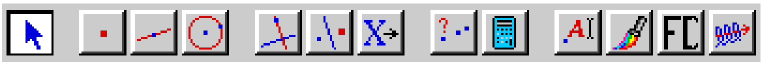
- Exercice 7.

a) Après cette expérimentation, pouvez-vous préciser les dimensions des segments [AB] et [AE] ? Justifiez votre réponse.

b) En admettant que les boules rouges représentent le succès d'une Expérience Aléatoire, quelle Urne de Bernoulli proposeriez-vous pour représenter l'Expérience « choisir un pixel au hasard dans le rectangle ABCD » ? Justifiez votre réponse.
Total de boules rouges : ______ Total de boules : _______

Troisième Séance – Fiche 1

Allumer l'ordinateur, ouvrir le dossier **Math** puis le dossier **2nde5**.
Ouvrir le Dossier **Cileda** et cliquer rapidement deux fois sur l'icône nommé « Barre d'outil S3 ». Cabri-géomètre s'ouvre, cliquer pour faire disparaître la fenêtre d'entrée.
Cette barre d'outils comporte à droite un outil d'animation  et un outil **FC**.



Dans Cabri, ouvrez la figure **S3F1.**

Le jeu de Franc Carreau : Ce jeu a été étudié pour la première fois en 1733 par un naturaliste et mathématicien français, Georges-Louis Leclerc de Buffon. Il consiste à jeter un écu[91] sur un carrelage. Les joueurs parient sur la position finale de l'écu : tombera-t-il entièrement sur un seul carreau (franc-carreau), sur un joint entre deux carreaux, ou encore sur deux, trois ou quatre joints ?
Considérons comme succès de cette expérience aléatoire « la pièce tombe à franc-carreau ».

➢ Exercice 1.

Est-il possible de représenter ce jeu par une Urne de Bernoulli ? Si oui, laquelle ? Si non, pourquoi ?

Dans Cabri, ouvrez la figure **S3F2**. Vous pouvez déplacer le point P pour explorer la situation.

➢ Exercice 2.

En considérant les mesures données à l'écran, quelle Urne de Bernoulli proposeriez-vous pour représenter ce jeu ? Justifiez votre réponse.
Nombre total de boules : ____ Nombre de boules blanches : ___
Justification :

Quelle est l'Urne à Pixels équivalente ?(Nommez les points et placez [EF], en indiquant les mesures et les calculs).

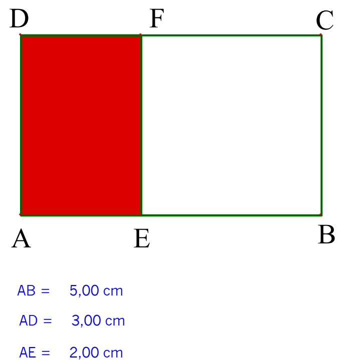
Coup de pouce : Dans quelles conditions géométriques le disque est-il placé entièrement à l'intérieur du carré ?

[91] Écu : ancienne monnaie française.

Dans Cabri, ouvrez la figure S3F3.

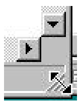
➢ Exercice 3

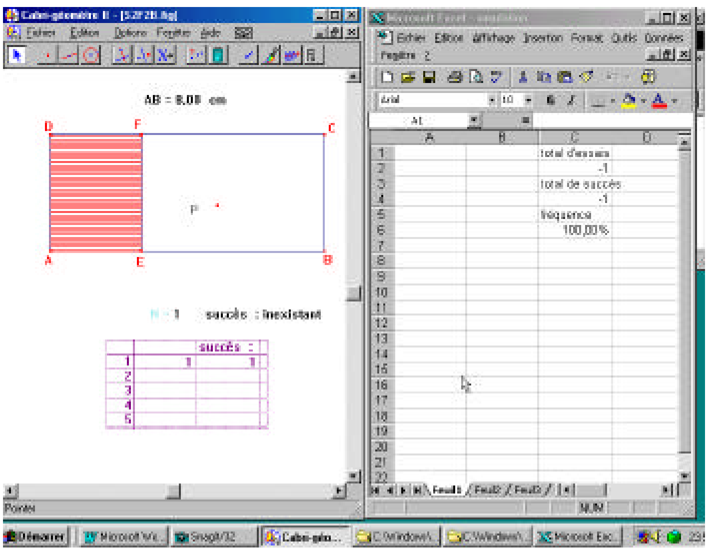
Considérons le jeu de Franc Carreau. Nous voulons remplacer, dans ce jeu, l'écu par une plaque triangulaire (un triangle équilatéral). Quel jeu choisiriez-vous pour avoir plus de chances de faire « franc-carreau » : celui avec le triangle qui est présenté à l'écran, celui avec le disque présenté par l'exercice 2, ou encore l'Urne à Pixels ci-dessous ? Justifiez votre réponse.



Justification :

Consignes pour réaliser l'animation :
Préliminaires

- En utilisant le coin droit de la fenêtre  et la barre supérieure bleue de la fenêtre, positionnez la fenêtre de Cabri pour qu'elle n'occupe que la moitié gauche de l'écran. Si vous avez besoin d'aide demandez au professeur.
- Cliquez dans la barre des tâches en bas de la fenêtre sur  pour faire apparaître le contenu du dossier **Cileda**. Cliquez deux fois rapidement sur le fichier **Simulation**. Le tableur Excel s'ouvre, réduisez si nécessaire la fenêtre pour qu'elle n'occupe que la partie droite de l'écran. Pour passer de Cabri à Excel, il suffit alors de cliquer dans leurs fenêtres respectives.



Simulation

•En revenant sur la fenêtre Cabri, sélectionnez l'outil **Trace** et sélectionnez le point P.

• Sélectionnez l'outil d'animation  d'un clic bref, (il s'allume).

• Sélectionnez d'un clic bref le tableau en bas de la page de Cabri.

• Saisissez le nombre 1 de l'expression N=1, en tirant vers le bas de l'écran avec le ressort qui apparaît. Lâchez le ressort et l'animation commence, ne l'interrompez pas avant d'avoir atteint N = 1000 (environ). On clique dans l'écran pour interrompre l'animation.
En cas de problème recommencez en sélectionnant « Version précédente » dans le menu Fichier. Appelez le professeur en cas de difficultés.

•Sélectionnez le tableau dans Cabri (s'il ne clignote pas déjà), et copiez avec l'article **Copier** du menu **Edition**,

• Activez le tableur Excel en “cliquant” sur la fenêtre du tableur Excel. Sélectionnez la cellule A1 et collez la table fournie par Cabri (**Coller** du menu **Edition**) .

• Notez sur votre feuille les résultats indiqués dans la troisième colonne du tableur (nombre d'essais, sombre de succès et fréquence).

• Pour recommencer l'animation, en cas de problèmes, effacez les contenus des colonnes A et B d'Excel (Cliquez sur le « têtes » de colonne A et B pour les noircir et utilisez la touche SUPPR). Revenez sur Cabri et dans le menu Edition, choisir “Version Précédente” sans enregistrer.

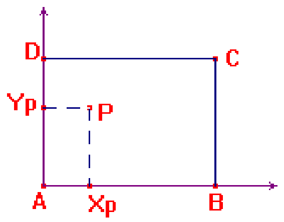
Annexe 4 : Comment créer un point au hasard dans Cabri.

Dans l'objectif de construire un point dont les coordonnées sont un couple de nombres pseudo-aléatoires, tel que nous l'avons présenté au paragraphe §3 du Chapitre III, revenons à l'utilisation de la fonction « rand » dans Cabri-géomètre II.

En activant l'outil « Calculatrice » dans Cabri, nous pouvons obtenir un nombre aléatoire (pseudo-aléatoire) qui appartient à l'intervalle [a ; b] en écrivant au moyen du clavier l'expression « **rand(a,b)** ». Ainsi, si nous voulons obtenir une valeur réelle appartenant à l'intervalle [0 ; 1] nous devons écrire « **rand(0,1)** ». La fonction « rand » dans Cabri produit par défaut une distribution uniforme sur l'ensemble de valeurs obtenues dans l'intervalle [a ; b] choisi.

Soit ℓ_{AB} la longueur en centimètre du segment [AB]. Pour obtenir un pixel *au hasard* sur ce segment, il suffit alors de saisir au clavier l'expression « $\mathbf{rand(0,1)*}\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{AB}}$ ». Cette multiplication conserve la distribution uniforme qui résulte de l'usage de la fonction « rand ».

Ainsi, les coordonnées du point P, représenté à l'écran par le pixel $\wp$, seront :



$$\begin{cases} x_p = \text{rand}(0,1) * \ell_{AB} \\ y_p = \text{rand}(0,1) * \ell_{AD} \end{cases}$$

Pour construire ce point P, nous construisons d'abord les points X_p (x_p ; 0) et Y_p (0 ; y_p), respectivement, tel que nous l'avons décrit au paragraphe §3 du Chapitre III : on utilise l'outil «Report de mesures » dans le menu de Cabri.

Du fait que la distribution de probabilités sur [AB] et sur [AD] est uniforme, alors la distribution sur l'ensemble de pixels obtenus dans le rectangle ABCD est aussi uniforme : elle est le produit des lois de variables indépendantes.

Dans l'objectif de rendre opératoire la simulation de l'expérience aléatoire « *choisir un pixel* $\tilde{A}$ *au hasard dans le rectangle ABCD* » un très grand nombre de fois, nous introduisons un « compteur N » dans les expressions ci-dessus. (cf. §3 du Chapitre III). Cette incrémentation relance automatiquement, par défaut du logiciel, le calcul des coordonnées d'un nouveau pixel, et indépendamment du pixel précédent. Remarquons que, à part la fonction de relancer les calculs, la valeur N est inopérante dans les expressions que nous décrivons ci-dessous :

$$\begin{cases} x_p = \text{rand}(0{,}1 + N - N) * \ell_{AB} \\ y_p = \text{rand}(0{,}1 + N - N) * \ell_{AD} \end{cases}$$

On aurait pu aussi introduire le compteur N de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_p = \text{rand}(0, N / N) * \ell_{AB} \\ y_p = \text{rand}(0, N / N) * \ell_{AD} \end{cases}$$

Remarquons que cette formule ne prend pas en compte la représentation d'urne à pixels présentée au Chapitre III car elle ne considère pas la discrétisation de la surface du rectangle ABCD par les pixels. Nous pouvons alors utiliser une deuxième formule, dans laquelle on introduit le paramètre de discrétisation : la résolution de l'écran de l'ordinateur de l'utilisateur. Dans notre travail, la valeur « 30 pixels par centimètre » a été décidée à des fins de simplification de calculs pour les élèves. En effet, la résolution de Cabri pour l'environnement Macintosh est de, à peu près, 28 pixels par centimètre, soit le quotient entre le paramètre d'affichage (72 dpi) et 1 pouce (2,54 cm).

Pour l'environnement Windows, la valeur dépend de la résolution de l'écran, mais nous pouvons estimer le nombre de pixels par centimètre en prenant aussi le quotient entre le paramètre d'affichage (qui varie selon l'ordinateur) et la valeur d'un pouce. Sur notre ordinateur, ce paramètre est de 96 dpi. Dans la suite, nous désignerons « k » ce quotient :

$$k = \frac{96\text{dpi}}{2{,}54\text{cm}}$$

L'expression à utiliser devient alors : **round[rand(0,1+N-N)*** ℓ_{AB} ***k] ¸ k**

On peut constater que cette formule est beaucoup plus complexe que la précédente, mais elle est plus cohérente avec l'interprétation didactique du pixel que nous avons retenue. La construction de cette formule est fondée d'abord sur un "changement d'unités" : on passe de « cm » à « pixels » par la multiplication « ℓ_{AB} * **k** ».

Dans la suite, nous revenons à la formule précédente pour choisir un pixel *au hasard* sur le segment [AB] : « **rand(0,1+N-N)*** ℓ_{AB} ***k** ».

Du fait qu'un pixel est l'élément minimal d'une image électronique, nous introduisons la fonction « Arrondi entier », disponible dans l'outil « Calculatrice » du menu de Cabri. Cette fonction est accessible par l'usage du clavier en écrivant « round(x) ». L'introduction de cette fonction dans l'expression sert à obtenir un nombre entier de pixels entre 0 et « ℓ_{AB}* k ». L'expression devient alors « **round(rand(0,1+N-N)*** ℓ_{AB} * **k** ».

Le résultat ainsi obtenu est exprimé en unités de pixels. La division de ce résultat par

« k » fournie, en centimètre, l'abscisse du pixel $\wp$ obtenu. Les expressions qui donnent les coordonnées du pixel $\wp$, représentant du point P, sont respectivement :

$$\begin{cases} x_p = \text{round}\,(\text{rand}\,(0,1+N-N) * \ell_{AB} * k) \div k \\ y_p = \text{round}\,(\text{rand}\,(0,1+N-N) * \ell_{AD} * k) \div k \end{cases}$$

Un contrôle fréquentiste de la qualité des résultats obtenus au moyen des deux expressions que nous venons de présenter est fourni dans les tableaux qui suivent. Les épreuves ici représentées dans les deux tableaux sont une simulation d'un jeu de Franc-Carreau pour lequel le rapport d'aires indique une probabilité de 0,36 d'obtenir la position « franc-carreau », conformément la figure ci-dessous :

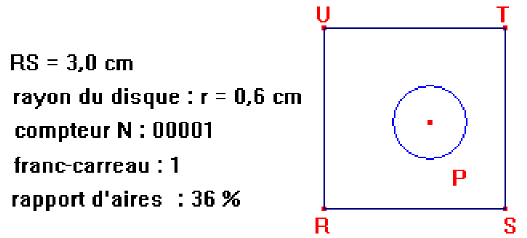


Tableau 1 : formule « **rand(0,1+N-N)*** ℓ_{AB} »

Première série de résultats.

nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais
998	998	998	998	998	998	998	998	998	998
nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès
343	365	356	348	357	388	358	349	358	366
fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence
34,37%	36,57%	35,67%	34,87%	35,77%	38,88%	35,87%	34,97%	35,87%	36,67%

Valeurs cumulées

Essais	1996	2994	3992	4990	5988	6986	7984	8982	9980
succès	708	1064	1412	1769	2157	2515	2864	3222	3588
fréquence	35,47%	35,54%	35,37%	35,45%	36,02%	36,00%	35,87%	35,87%	35,95%

Deuxième série de résultats.

nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais
998	998	998	998	998	998	998	998	998	998
nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès
344	367	353	348	358	387	358	358	366	363
fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence
34,47%	36,77%	35,37%	34,87%	35,87%	38,78%	35,87%	35,87%	36,67%	36,37%

Valeurs cumulées

Essais	1996	2994	3992	4990	5988	6986	7984	8982	9980
succès	711	1064	1412	1770	2157	2515	2873	3239	3602
fréquence	35,62%	35,54%	35,37%	35,47%	36,02%	36,00%	35,98%	36,06%	36,09%

$$\left.\begin{array}{l} \text{Total d'essais dans les deux séries d'épreuves : } 19\,960 \\ \text{Total de succès dans les deux séries d'épreuves : } 7190 \end{array}\right\} \text{Fréquence : } 36{,}02\%$$

Tableau 2 : formule « [**round(rand(0,1+N-N)*** ℓ_{AB} *** k**] ÷ **k** »

Première série de résultats.

nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais
998	998	998	998	998	998	998	998	998	998
nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès
353	359	354	349	366	399	354	341	355	371
fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence
35,37%	35,97%	35,47%	34,97%	36,67%	39,98%	35,47%	34,17%	35,57%	37,17%

Valeurs cumulées

Essais	1996	2994	3992	4990	5988	6986	7984	8982	9980
succès	712	1066	1415	1781	2180	2534	2875	3230	3601
fréquence	35,67%	35,60%	35,45%	35,69%	36,41%	36,27%	36,01%	35,96%	36,08%

Deuxième série de résultats.

nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais	nb d'essais
998	998	998	998	998	998	998	998	998	998
nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès	nb succès
362	374	335	348	377	358	357	349	334	368
fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence	fréquence
36,27%	37,47%	33,57%	34,87%	37,78%	35,87%	35,77%	34,97%	33,47%	36,87%

Valeurs cumulées

Essais	1996	2994	3992	4990	5988	6986	7984	8982	9980
succès	736	1071	1419	1796	2154	2511	2860	3194	3562
fréquence	36,87%	35,77%	35,55%	35,99%	35,97%	35,94%	35,82%	35,56%	35,69%

$$\left.\begin{array}{l}\text{Total d'essais dans les deux séries d'épreuves : } 19\,960 \\ \text{Total de succès dans les deux séries d'épreuves : } 7163\end{array}\right\}\text{Fréquence : } 35{,}89\%$$